PALMIERI FRANCESCO SAVERIO

I GRUPPI DI MOVIMENTI

NELLE METRICHE

SUBORDINATE ALLA PROIETTIVA

PARTE I[a]

Le forme di 2[a] specie

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA PACE DI FILIPPO CUGGIANI

Via della Pace num. 35.

1902

Come è noto, si stabilisce una metrica generale in una forma di 2ª specie, considerando una quadratica come assoluto e assumendo come elemento metrico lineare di due elementi M, M′ l'espressione:

$$(*)\qquad \frac{1}{2\sqrt{-\varkappa}}\, lg\,(M, M', I, J).$$

I, J sono gli elementi che la forma di 1ª specie (M, M′) ha in comune con l'assoluto, e $\varkappa$ è il medesimo per tutte le forme di 1ª specie e si chiama *curvatura lineare.*

Ora se l'assoluto è immaginario, $\varkappa$ è positivo e la metrica si dice *ellittica* o *Riemanniana*, essa è estesa a tutta la forma di 2ª specie. Se l'assoluto è reale $\varkappa$ è negativo e la metrica si dice *iperbolica* o di *Lobatscheftsckij*, essa è estesa alla sola regione interna alla quadratica. Se infine l'assoluto è degenere la (*) diviene un'*espressione limite* per $\varkappa = \infty$: Il caso ordinario è che degeneri in una forma di 1ª specie *reale* con due elementi *ciclici immaginarii*, e la metrica che ne risulta è l'ordinaria metrica *Euclidea* o *parabolica*, essa è estesa alla forma di 2ª specie munita di una forma di 1ª specie impropria. In

tutte e tre queste metriche si assume come elemento metrico angolare di due forme di 2ª specie m, m l'espressione:

$$(**) \qquad \frac{1}{2\sqrt{-h}} \left(lg\left(m\,,\, m',\, i\,,\, j\right)\right.$$

ove i, j sono le tangenti condotte dall'elemento $m \,.\, m'$ all'assoluto.

Siccome dall'elemento $m \,.\, m'$ in ogni caso non si possono condurre all'assoluto tangenti *reali*, h, *curvatura angolare* è positiva in tutte e tre le metriche; cioè in tutti e tre i casi precedenti la metrica angolare è ellittica.

Ciò premesso fra le ∞^8 omografie che trasformano la forma di 2ª specie in se stessa ve ne sono di quelle che lasciano inalterato l'assoluto e quindi gli elementi *lineari* ed *angolari;* è di questa famiglia di trasformazioni che ci occupiamo nel presente lavoro.

Come si sa le tre metriche anzidette hanno una rappresentazione concreta nello spazio Euclideo nelle tre famiglie di superfici a *curvatura costante*, *positiva*, *nulla* e *negativa*, corrispondendo alle forme di 1ª specie le geodetiche di dette superfici, come risulta dalle classiche ricerche del Beltrami; in questa rappresentazione ai movimenti delle forme di 2ª specie corrispondono le trasformazioni in se stesse di dette superfici, considerate come flessibili e inestendibili.

Osserviamo inoltre che le forme che può assumere l'*elemento metrico lineare differenziale*, nelle tre metriche suddette coincidono con quelle che assume sulle singole superfici corrispondenti.

Per semplicità nel presente lavoro abbiamo assunto le curvature numericamente uguali ad 1.

Roma, 15 luglio 1902.

MOVIMENTI E FIGURE CONGRUENTI

1. Consideriamo una forma di 2ª specie II e su di essa una corrispondenza proiettiva od omografia che indicheremo con S, di equazioni:

$$(1)\quad y_1 : y_2 : y_3 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 : \\ : a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \,.$$

Si sa che siffatte proiettività hanno al più *tre* elementi uniti *reali* e almeno *uno,* a meno che tutti gli elementi siano uniti; e in tal caso la trasformazione si dice identica; è chiaro che condizione necessaria e sufficiente che la trasformazione sia identica e che si abbia:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a \qquad a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = o \,.$$

Poniamo per semplicità $a = 1$, le equazioni della trasformazione identica le potremo scrivere:

$$y_1 = x_1 \qquad y_2 = x_2 \qquad y_3 = x_3 \,.$$

Poniamo ora:

$$a_{11} = 1 + \delta\alpha_{11} \qquad a_{22} = 1 + \delta\alpha_{22} \qquad a_{33} = 1 + \delta\alpha_{33}$$
$$a_{is} = \delta\alpha_{is} \qquad (i \neq s)$$

la trasformazione diviene:

$$(2)\qquad y_1 = x_1 + \sum_1^3 \delta\alpha_{1i} x_i \,, \qquad y_2 = x_2 + \sum_1^3 \delta\alpha_{2i} x_i \,,$$
$$y_3 = x_3 + \sum_1^3 \delta\alpha_{3i} x_i \,.$$

Una siffatta trasformazione si dice *infinitesima*, essa fa corrispondere ad ogni elemento di II un elemento infinitamente vicino.

Sia ora su II un sistema finito o infinito di trasformazioni proiettive S, e sia tale che la trasformazione risultante da due trasformazioni del sistema, appartenga al sistema. Siffatto sistema si dirà formare un *gruppo* di trasformazioni proiettive. Date due proiettività S , S′ esse dànno luogo a due proiettività risultanti S . S′, S′. S a seconda che si fa precedere S o S′; esse sono in generale distinte e si dicono *prodotto* delle sostituzioni S , S′ in un determinato ordine. Così, date più sostituzioni proiettive, si può considerare il loro *prodotto in un certo determinato ordine.* Il prodotto di più proiettività gode in generale della proprietà associativa, ma non della commutativa come è facile accertarsene. Un sistema di proiettività forma adunque un gruppo se il prodotto di quante si vogliano proiettività del sistema appartiene al medesimo. Se le proiettività S che entrano in un prodotto sono tutte uguali, queste formano una potenza S^m; è chiaro che nel gruppo entrano tutte le potenze di una sua sostituzione. Due trasformazioni proiettive si dicono l'una inversa dell'altra se il loro prodotto è l'identità. L'identità si rappresenta col simbolo 1 e l'inversa di una sostituzione S con S^{-1}. S^{-n} ci rappresenta la potenza n^a di S^{-1} e si ha qualunque siano m, n . $S^m . S^n = S^{m+n}$; in particolare $S^n . S^{-n} = 1$.

Se un gruppo di proiettività è formato di un numero finito di trasformazioni vedremo che ammette le sostituzioni due a due inverse e quindi la sostituzione identica. Per i gruppi infiniti questo lo supporremo esplicitamente.

Una prima divisione importantissima che si presenta nei gruppi è la seguente: I coefficienti delle trasformazioni (1) che abbiamo indicato con a_{is}, le quali appartengano ad un gruppo, possiamo immaginarli come funzioni di più parametri $t_1, t_2, \ldots t_r$, e supponiamo che t_i sia dato tra i limiti $l_i < t_i < L_i$.. Variando t_i si hanno tutte le trasformazioni del gruppo; ora se i parametri t_i sono suscettibili di variare in modo continuo il gruppo si dirà *continuo*, se essi fra i limiti precedenti non prendono che una serie discreta di valori *discontinuo.*

In altri termini consideriamo la varietà a r dimensioni un elemento della quale è individuato dal gruppo di valori $(t_1, t_2, .. t_r)$, se in essa varietà si può staccare una regione (che può essere anche tutta la varietà) tale che essa viene descritta da tutti gli elementi $(t_1, t_2, \ldots t_r)$ mentre questo gruppo di parametri prende tutti i possibili valori che corrispondono a tutte le proiettività del gruppo; in tal caso il gruppo è continuo. Se invece gli elementi corrispondenti ai gruppi di parametri $(t_1, t_2, \ldots t_i)$ che dànno le sostituzioni del gruppo formano un sistema discontinuo allora il gruppo è *discontinuo.* Intanto è chiaro che in un gruppo continuo si hanno sostituzioni infinitesime; perchè se la S corrisponde al gruppo di parametri $(t_1, t_2, \ldots t_r)$ e la S′ al gruppo di parametri $(t_1 + dt_1, t_2 + dt_2, \ldots t_r + dt_r)$ la $S^{-1}. S'$ è infinitesima. Ma sostituzioni infinitesime si possono avere anche in gruppi discontinui. Difatti consideriamo il sistema derivato (Cantor) del sistema di elementi (t) corrispondenti alle trasformazioni del gruppo, esso esiste se il gruppo ha un numero infinito di trasformazioni; se esso sistema derivato non si compendia nell'elemento infinito $(t = \infty)$ avrà almeno un elemento a cui corrispondono valori finiti dei parametri sia $(t^{(0)})$; per la definizione di elemento derivato in un intorno per quanto si voglia piccolo di esso vi saranno degli altri elementi a cui corrispondono proiettività del gruppo sia $(t^{(0)} + \delta t^{(0)})$ uno di essi, se S è la trasformazione corrispondente al gruppo di parametri $(t^{(0)})$; S′ quella corrispondente al gruppo di parametri $(t^{(0)} + \delta t^{(0)})$ la $S^{-1}. S'$ è infinitesima. Siffatti gruppi *discontinui* lo si dicono *impropriamente* in tutta la forma II. Un gruppo di proiettività discontinuo pur non presentando sostituzioni infinitesime può essere *impropriamente* discontinuo per qualche elemento di II, nel senso che per quanto piccolo si consideri un intorno di siffatto elemento in esso vi siano sempre elementi corrispondenti per qualche sostituzione del gruppo. Ciò di fatto avviene se il gruppo G è di un numero infinito di sostituzioni; inquantochè se P è un elemento della forma e $P', P'', \ldots P^{(n)}, \ldots$ i corrispondenti per tutte le sostituzioni del gruppo, in numero infinito, essendo la forma chiusa questo sistema d'infiniti elementi ammette almeno un elemento derivato (Weierstrass) in un intorno

per quanto piccolo del quale cadono infiniti punti $P^{(n)}$. Ora questi elementi derivati formeranno a loro volta un sistema che sarà disseminato nella forma II. Per quelle regioni di II nell'*interno* nelle quali non cade nessun elemento di questo sistema di elementi derivati il gruppo è propriamente discontinuo, nel senso che si può determinare un' intorno di un qualsivoglia elemento di questa regione nell' interno del quale non cada verun'elemento corrispondente, per proiettività del gruppo.

2. Il sistema di tutte le proiettività della forma II che si ottengono facendo variare le a_{is} fra $+\infty$ e $-\infty$ con continuità forma un *gruppo continuo* evidentemente, il quale comprende ogni altro gruppo di trasformazioni proiettive, inquantochè tutte le trasformazioni di esso appartengono al gruppo generale. Se tutte le sostituzioni del gruppo G' appartengono al gruppo G si dice che G' è contenuto in G ovvero è un *sottogruppo* di G. Tra i sottogruppi del gruppo generale di proiettività merita speciale menzione quello le cui trasformazioni non mutano l' elemento metrico lineare, qualora in II si sia stabilita una metrica (generale).

È chiaro che siffatte proiettività formano un gruppo. Difatti S trasformi $\overline{MN}$ in $\overline{M_1N_1}$ tale che $|MN| = |M_1N_1|$, S' trasformi $\overline{M_1N_1}$ in $\overline{M_2N_2}$ tale che $|M_1N_1| = |M_2N_2|$, la S . S' trasformerà $\overline{MN}$ in $\overline{M_2N_2}$ e si avrà $|MN| = |M_2N_2|$, quindi sta quanto si era asserito. Tra le trasformazioni del gruppo vi è evidentemente la trasformazione identica. Siano $c_1, c_2, \ldots c_r$ i valori dei parametri che dànno le trasformazioni del gruppo; s'indichino le trasformazioni con f_1, f_2, f_3 avremo in coordinate omogenee:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3;\ c_1, c_2, \ldots c_r),\quad y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3;\ c_1, c_2, \ldots c_r),$$
$$y_3 = f_3(x_1, x_2, x_3;\ c_1, c_2, \ldots c_r).$$

La trasformazione identica corrisponda ai valori $c_1^{(0)}\, c_2^{(0)} \ldots c_r^{(0)}$ dei parametri; avremo identicamente

$$x_1 = f_1(x_1, x_2, x_3;\ c_1^{(0)}, \ldots c_r^{(0)}),\quad x_2 = f_2(x_1, x_2, x_3;\ c_1^{(0)}, \ldots c_r^{(0)})$$
$$x_3 = f_3(x_1, x_2, x_3;\ c_1^{(0)}, \ldots c_r^{(0)}).$$

Ponendo $c = c^{(o)} + \delta c^{(o)}$ avremo:

$$y_1 = f_1 + \sum_1^r \left(\frac{df_1}{dc_i}\right)_o \delta c_i^{(o)} \qquad y_2 = f_2 + \sum_1^r \left(\frac{df_2}{dc_i}\right)_o \delta c_i^{(o)}$$

$$y_3 = f_3 + \sum_1^r \left(\frac{df_3}{dc_i}\right)_o \delta c_i^{(o)}.$$

Se t è un nuovo parametro e se poniamo $\frac{\delta c_i^{(o)}}{\delta t} = \gamma_i$ e $\sum_1^r \frac{df_k}{dc_i} \gamma_k = \xi_k$ potremo scrivere:

$$(3) \quad y_1 = x_1 + \xi_1 \delta t \qquad y_2 = x_2 + \xi_2 \delta t \qquad y_3 = x_3 + \xi_3 \delta t\,.$$

La (3) è una trasformazione infinitesima; se essa fa rimanere inalterato l'elemento lineare diremo che è un *movimento* infinitesimo; integrata dà un gruppo di movimenti. Per determinare i movimenti si tratta dunque di determinare le ξ_i. Se ds è l'elemento metrico dovremo avere $\delta ds = o$ equazione di condizione che serve a determinare le ξ_i.

Poniamo $x = x_1 : x_3$; $y = x_2 : x_3$; $x' = y_1 : y_3$; $y' = y_2 : y_3$ avremo dalle (3):

$$x' = \frac{x + \xi_1 \delta t}{1 + \xi_3 \delta t} \qquad y' = \frac{y + \xi_1 \delta t}{1 + \xi_3 \delta t}$$

ove ξ_1, ξ_2, ξ_3 sono funzioni di x, y: Ora:

$$\frac{1}{1 + \xi_3 \delta t} = 1 - \xi_3 \delta t$$

quindi:

$$x' = x + (\xi_1 - x\xi_2)\delta t \qquad y' = z + (\xi_2 - y\xi_3)\delta t$$

e posto $\xi_1 - x\xi_3 = \omega \qquad \xi_1 - y\xi_3 = \vartheta$ avremo:

$$x' = x + \omega\delta t \qquad y' = y + \vartheta\delta t; \quad (4)\ \delta x = \omega\delta t \qquad \delta y = \vartheta\delta t\,.$$

Se facciamo la trasformazione di coordinate:

$$x = \varphi(u, v); \qquad y = \psi(u, v); \qquad \delta x = \frac{d\varphi}{du}\delta u + \frac{d\varphi}{dv}\delta v;$$

$$\delta y = \frac{d\psi}{du}\delta u + \frac{d\psi}{dv}\delta v$$

e poniamo: $\omega(\varphi, \psi) = \omega'(u, v)$, $\vartheta(\varphi, \psi) = \vartheta'(u, v)$

avremo per le (4):

$$\frac{d\varphi}{du}\delta u + \frac{d\varphi}{dv}\delta v = \omega'\delta t, \quad \frac{d\psi}{du}\delta u + \frac{d\psi}{dv}\delta v = \vartheta'\delta t;$$

$$\delta u = \frac{\omega'\frac{d\psi}{dv} - \vartheta'\frac{d\varphi}{dv}}{\begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{du} & \frac{d\varphi}{dv} \\ \frac{d\psi}{du} & \frac{d\psi}{dv} \end{vmatrix}} \cdot \delta t; \quad dv = \frac{\vartheta'\frac{d\varphi}{du} - \omega'\frac{d\varphi}{du}}{\begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{du} & \frac{d\varphi}{dv} \\ \frac{d\psi}{du} & \frac{d\psi}{dv} \end{vmatrix}} \cdot \delta t$$

Che potremo scrivere:

$$(4') \qquad \delta u = \Omega\delta t \qquad \delta v = \Theta\delta t.$$

3. Consideriamo ad esempio una metrica Euclidea e siano $x_3 = o$ la forma all'infinito e $x_1^2 + x_2^2 = o$, $x_3^2 = o$ gli elementi ciclici; allora come si sa in coordinate Cartesiane x, y:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Quindi:

$$(5) \qquad ds\delta ds = dxd\delta x + dyd\delta y = o.$$

Ora per le (4)

$$d\delta x = \left(\frac{d\Omega}{dx}dx + \frac{d\Omega}{dy}dy\right)\delta t \quad d\delta y = \left(\frac{d\Theta}{dx}dx + \frac{d\Theta}{dy}dy\right)\delta t.$$

Quindi sostituendo nella (5)

$$\frac{d\Omega}{dx}dx^2 + \frac{d\Theta}{dy}dy^2 + \left(\frac{d\Theta}{dx} + \frac{d\Theta}{dy}\right)dxdy = o$$

e poichè dx, dy sono arbitrarie:

$$(6)\ \frac{d\Omega}{dx} = o \qquad (6')\ \frac{d\Theta}{dy} = o \qquad (6'')\ \frac{d\Theta}{dx} + \frac{d\Omega}{dy} = o.$$

Derivando la (6″) rispetto a y si ha: $\frac{d^2\Theta}{dxdy}+\frac{d^2\Omega}{dy^2}=o$ e per la (6′): $\frac{d^2\Theta}{dxdy}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\Theta}{dy}\right)=o$ quindi (7) $\frac{d^2\Omega}{dy^2}=o$. Analogamente derivando la (6″) rispetto a x e tenendo conto della (6) si ha (7′): $\frac{d^2\Theta}{dx^2}=o$ e però: $\Omega=\Omega(y)$ e $\Theta=\Theta(y)$ per le (6) e (6′) e inoltre $\Omega=\alpha y+\beta$ $\Theta=\alpha' x+\beta'$ per le (7) (7′): ove $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ sono delle costanti; per la (6″) si ha $\alpha+\alpha'=o$ e quindi potremo scrivere:

$$\Omega=\beta+\alpha y \qquad \Theta=\beta'-\alpha x .$$

E sostituendo nelle (4) si ha il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{\delta x}{\beta+\alpha y}=\frac{dy}{\beta'-\alpha x}=\delta t$$

e posto: $y=u-\frac{\beta}{\alpha}$, $x=v+\frac{\beta'}{\alpha}$ si avrà:

(*) $$\frac{du}{dt}=-\alpha v \qquad \frac{dv}{dt}=\alpha u .$$

Da questo sistema si deduce immediatamente:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\alpha^2 u=o .$$

L'integrale generale di questa equazione è, come si sa, dato da:

$$u=\mathrm{A}\cos\alpha t+\mathrm{B}\,\mathrm{sen}\,\alpha t$$

di qui si deduce per la 1ª delle (*)

(8′) $$v=\mathrm{A}\,\mathrm{sen}\,\alpha t-\mathrm{B}\cos\alpha t$$

Posto $t=o$ si ottiene $\mathrm{A}=(u)_{t=o}=u_o$ $-\mathrm{B}=(v)_{t=o}=v_o$ e però si ha

$$u=u_o\cos\alpha t-v_o\,\mathrm{sen}\,\alpha t \qquad v=v_o\cos\alpha t+u_o\,\mathrm{sen}\,\alpha t .$$

Se poniamo $\frac{\beta}{\alpha} = l$, $\frac{\beta'}{\alpha} = m$ e nelle formule precedenti al posto di $u, v; x, y$ si ha:

$$y + l = (y_o + l) \cos \alpha t - (x_o - m) \operatorname{sen} \alpha t;$$
$$x - m = (x_o - m) \cos \alpha t + (y_o + l) \operatorname{sen} \alpha t.$$

Ovvero anche:

$$y = l (\cos \alpha t - 1) + m \operatorname{sen} \alpha t + y_o \cos \alpha t - x_o \operatorname{sen} \alpha t;$$
$$x = m (1 - \cos \alpha t) + l \operatorname{sen} \alpha t + x_o \cos \alpha t + y_o \operatorname{sen} \alpha t$$

Ponendo infine

$$l (\cos \alpha t - 1) - m \operatorname{sen} \alpha t = h,$$
$$m (1 - \cos \alpha t) + l \operatorname{sen} \alpha t = k, \quad \alpha t = - \Theta$$

potremo scrivere

$$(9) \qquad y = h + y_o \cos \Theta + x_o \operatorname{sen} \Theta, \quad x = k + x_o \cos \Theta - y_o \operatorname{sen} \Theta.$$

Queste formule rappresentano un gruppo continuo di movimenti; è facile verificarlo. Difatti se (x'_o, y_o) (x'_o, y'_o) sono due elementi, (x, y) (x', y') sono i corrispondenti.

Si ha evidentemente:

$$y' - y = (y'_o - y_o) \cos \Theta + (x'_o - x_o) \operatorname{sen} \Theta;$$
$$x' - x = (x'_o - x_o) \cos \Theta - (y'_o - y_o) \operatorname{sen} \Theta$$

da cui quadrando e sommando:

$$(y' - y)^2 + (x' - x)^2 = (y'_o - y_o) + (x'_o - x_o)^2$$

ciò che dimostra che le (9) sono movimenti, esse poi formano un gruppo continuo perchè h, k, Θ sono suscettibili di tutti i valori da $+\infty$ a $-\infty$ reali. Siano i movimenti

$$S: \; y' = h_i + y \cos \Theta_i + x \operatorname{sen} \Theta_i \quad x' = k_i + x \cos \Theta_i - y \operatorname{sen} \Theta_i$$
$$S': \; y'' = h_j + y' \cos \Theta_j + x' \operatorname{sen} \Theta_j \quad y'' = k_j + x' \cos \Theta_j - y' \operatorname{sen} \Theta_j$$

Per trovare l'espressione del movimento S . S' osserviamo che dalle (9) si può scrivere

$$x + iy = k + ih + (x_o + iy_o)(\cos \Theta + i \operatorname{sen} \Theta)$$

e posto $x+iy=z$ $x-iy=\zeta$ $k+ih-a$ avremo

$$z=a+z_o e^{i\Theta} \tag{10}$$

e però potremo scrivere:

$$S;\ z'=a_i+ze^{i\Theta_i} \quad S';\ z''=a_j+z'e^{i\Theta_j}$$

e di qui deduciamo:

$$S''=S\cdot S';\ z'=a_j+a_i e^{i\Theta_j}+z'e^{i(\Theta_i+\Theta_j)};$$
$$S'''=S'\cdot S;\ z'=a_i+a_j e^{i\Theta_i}+ze^{i(\Theta_i+\Theta_j)}.$$

Vediamo se vi sono elementi uniti. Poniamo nella (10) $z=z_0=c$ si ha

$$c=\frac{a}{1-e^{i\Theta}}$$

e la (10) si può scrivere:

$$z=c\,(1-e^{i\Theta})+z_o e^{i\Theta};\ z-c=e^{i\Theta}\,(z_o-c).$$

Tutti i movimenti che hanno il medesimo elemento unito c formano un sottogruppo, delle *rotazioni* di centro c; è chiaro che un elemento della forma, per le *rotazioni* di centro c, descrive un circolo del medesimo centro; perchè la sua distanza da c rimane invariata. Se nelle formule precedenti supponiamo $a_i=c_i\,(1-e^{i\Theta_i})$, $a_j=c_j\,(1-e^{i\Theta_j})$ avremo

$$S''=S\cdot S';\ \ z'=c_j+e^{i\Theta_j}(c_i-c_j)-c_i e^{i(\Theta_i+\Theta_j)}+ze^{i(\Theta_i+\Theta_j)};$$
$$S'''=S'\cdot S;\ \ z'=c_i+e^{i\Theta_i}(c_j-c_i)-c_j e^{i(\Theta_i+\Theta_j)}+ze^{i(\Theta_i+\Theta_j)}.$$

Se $c_i=c_j$ si ha

$$S'';\ z'=c_i\,(1-e^{i(\Theta_i+\Theta_j)})+ze^{i(\Theta_i+\Theta_j)}$$
$$S''';\ z'=c_i(1-e^{i(\Theta_i+\Theta_j)})+ze^{i(\Theta_j+\Theta_i)}$$

e però: $S\,.\,S'\equiv S'.\,S$ è una rotazione intorno a c_i corrispondente ai valori del parametro $\Theta_i+\Theta_j$; Θ che è facile vedere è l'angolo che il raggio $(c\,,z')$ fa col raggio $(c\,,z)$ si dice *ampiezza* della rotazione e si ha che due rotazioni intorno ad un medesimo centro, di ampiezza Θ_i, Θ_j, si compongono in una ro-

tazione intorno al medesimo *centro.* Se $\Theta = o$ il movimento non ha centro e la sua equazione diviene:

$$z' = \alpha + z$$

esso si dice *traslazione* e direzione della traslazione è l'angolo φ, se $a = re^{\varphi i}$; nelle traslazioni per cui φ è fisso e varia r è facile vedere che gli elementi descrivono una forma di 1ª specie che forma con l'asse $x = o$ l'angolo φ; difatti si ha

$$x' = r \cos\varphi + x \cdot y' = r \operatorname{sen}\varphi + y$$

e però: $\dfrac{x' - x}{y - y} = \cot\varphi$ ciò che dimostra quanto si è asserito.

Le traslazioni a loro volta formano un sottogruppo; r si dice ampiezza della traslazione se si hanno due traslazioni:

$$S';\ z' = a_h + z\ (a_h = r_h e^{i\varphi_h}) \qquad S'';\ z' = a_k + z\ (a_k = r_k e^{i\varphi_k})$$

il loro prodotto, unico è:

$$S' \cdot S'' \equiv S'' \cdot S';\quad z' = a_h + a_k + z = a_e + z \quad (a_e = r_e e^{i\varphi_e})$$

da cui si ha:

$$r_e e^{i\varphi_e} = r_h e^{i\varphi_h} + r_k e^{i\varphi_k}$$

ovvero:

$$r_e \cos\varphi_e = r_h \cos\varphi_h + r_k \cos\varphi_k, \qquad r_e \operatorname{sen}\varphi_e = r_h \operatorname{sen}\varphi_h + r_k \operatorname{sen}\varphi_k$$

Da queste è facile dedurre che l'ampiezza della traslazione prodotta è in grandezza e direzione la diagonale del parallelogramma costruito sulle ampiezze delle traslazioni fattori.

In generale il prodotto di due rotazioni è una rotazione il cui centro è dato da

$$c_{i+j} = \frac{c_j + e^{i\Theta_j}(c_i - c_j) - c_i e^{i(\Theta_i + \Theta_j)}}{1 - e^{i(\Theta_i + \Theta_j)}}$$

a meno che non sia $\Theta_i + \Theta_j = o$ che in tal caso le due rotazioni danno luogo a una traslazione ecc. Vi sono forme di 1ª specie trasformate in se stesse da un movimento? L'equazione di una forma di 1ª specie è, se $m = m_1 + im_2$, $\mu = m_1 - im_2$:

(**) $$mz + \mu\zeta + b = o$$

e se è trasformata in se stessa dalla $z' = a + z\varepsilon^{i\Theta}$ si deve avere:

$$mz' + \mu\zeta' + b = \rho\ (mz + \mu\zeta + b)$$

e sostituendo si ha:

$$ma + \mu\alpha + b + e^{i\Theta}mz + e^{-i\Theta}\mu\zeta = \rho\ (mz + \mu\zeta + b)$$

qualunque sia z e però:

$$m\,(e^{i\Theta} - \rho) = o \quad \mu\,(e^{-i\Theta} - \rho) = o \quad ma + \mu\alpha + b\,(1 - \rho) = o$$

Uguaglianze che portano necessariamente se $\Theta \neq 2\kappa\pi$, $m = o$ $\mu = o$ $\rho = 1$, quindi per gli elementi della forma in forza della (**) si deve avere $z = \infty$; cioè essa è la forma $x_3 = o$ all'infinito. Una rotazione di centro c trasforma in se stessi i circoli di centro c e la forma all'infinito quindi anche gli elementi ciclici. Ciò ha luogo anche per le traslazioni per le quali, come è evidente, tutti gli elementi della forma all'infinito sono uniti. Dunque si ha il Teorema: I movimenti lasciano inalterato l'assoluto.

Riassumendo: I movimenti nella metrica Euclidea sono di due sorta.

a) Rotazioni intorno ad un centro c di equazioni:

$$z' - c = e^{i\Theta}\,(z - c)$$

ove c è l'affisso dell'elemento unito, Θ l'ampiezza della rotazione.

b) Traslazioni lungo una forma di 1ª specie, di equazioni:

$$z' = z + m$$

ove arg. m dà l'inclinazione della direzione della traslazione sull'asse delle σ, e mod. m l'ampiezza di esse traslazioni.

4. Consideriamo il sottogruppo delle rotazioni intorno ad un centro che scegliamo come origine degli assi. Siano:

$$z' = e^{i\Theta} \cdot z \tag{1}$$

Queste formano un fascio di proiettività nel fascio di forme di 1ª specie che ha per centro il centro di rotazione, le quali proiettività hanno per elementi uniti gli elementi (duali) isotropi. Difatti se ω, ω' sono gli angoli che le forme di 1ª specie a, a'

proiettanti dal centro di rotazione gli elementi z, z' fanno con l'asse delle σ si ha $arg z' = \omega'$ $arg z = \omega$ e della (1)

$$\omega' = \Theta + \omega$$

e però:

$$1 + tn\omega \cdot tn\omega' = \frac{tn\omega' - tn\omega}{tn\Theta} \tag{2}$$

Ora $tn\omega$, $tn\omega'$ sono le coordinate nel fascio di a, a' e la (2) è l'equazione di una proiettività; variando Θ si ha un fascio e gli elementi uniti sono gli elementi doppi della involuzione

$$tn\omega \cdot tn\omega' + 1 = o \quad \left(\Theta = \frac{\pi}{2}\right)$$

cioè sono dati dall'equazione

$$tn^2\omega + 1 = o$$

e poichè $tn\omega = \frac{y}{x}$ si ha:

$$y^2 + x^2 = o$$

come volevasi dimostrare. Esse quindi formano un fascio di proiettività ellittiche. Consideriamo una rotazione del fascio; la sua n.ª potenza sarà

$$z' = e^{in\Theta} z. \tag{3}$$

Se Θ è incommensurabile con 2π dico che vi sono delle potenze della (3) infinitesime. In tal caso (*) $2\pi\alpha = \Theta$ ove α è un numero irrazionale; ora sviluppiamo $p\alpha$ ove p è un intero qualsiasi in frazione continua e sia $\frac{n}{m}$ una delle ridotte tale che $\frac{1}{m}$ sia piccolo ed arbitrio. Avremo:

$$\left| p\alpha - \frac{n}{m} \right| < \frac{1}{m^2}$$

e però

$$mp\alpha = n + \frac{\varepsilon}{m} \quad (|\varepsilon| < 1)$$

Per la (*) si ha ponendo $m \,.\, p = q$

$$2\pi\alpha q = \Theta q = 2\pi n + \frac{2\pi\varepsilon}{m}$$

e però la sostituzione diviene:

$$z' = e \cdot z^{2i\pi n + \frac{2\pi\varepsilon}{m} i} = e \cdot z^{\frac{2\pi\varepsilon}{m} i}$$

Ora l'ampiezza di questa rotazione è $\frac{2\pi\varepsilon}{m}$ e può esser resa piccola quanto si vuole $. \, q \,.\, e \,.\, d.$

È chiaro poi che per nessun valore di n può aversi $e^{in\Theta} = 1$, poichè dovrebbe essere $n\Theta = 2m\pi$ e sarebbe Θ commensurabile con π. Quindi se l'ampiezza Θ è incommensurabile con π il sottogruppo formato dalle potenze della (3) ha infinite sostituzioni e fra queste ve ne sono delle infinitesime; quindi questo sottogruppo è *impropriamente discontinuo* in tutta la forma di 2ª specie. Sia ora Θ commensurabile con 2π e poniamo $\Theta = \frac{2q}{p}\pi$ essendo $q\,,p$ primi fra di loro, la (3) diviene

$$z' = e \cdot^{\frac{2iq\pi}{p}} z. \tag{3'}$$

Se indichiamo con S questa sostituzione la 1ª potenza di S per cui si abbia $S^n = 1$ è $n = p$ essa è periodica, e si ha $S^m = S^{m'}$ se $m \equiv m' \; (p)$. Ora la (3′) è potenza q della rotazione

$$z' = e^{\frac{2i\pi}{p}} \tag{3''}$$

e vi è una potenza della (3′) che dà la (3″); difatti essendo q e p primi fra di loro si ha:

$$nq + mp = 1$$

e però

$$z' = e \cdot^{\frac{2inq\pi}{p}} z = e \cdot z^{-2mi\pi + \frac{2i\pi}{p}} = e \cdot^{\frac{2i\pi}{p}} z\,.$$

Una siffatta rotazione si dice *ciclica*, p è il *periodo;* da quanto si è detto sopra segue che se q_i è uno dei $\varphi(p)$ numeri minori

di p e primi con esso la rotazione

$$z' = e^{\frac{2q_i \pi i}{p}} \cdot z$$

è a periodo p, e tutte le sue potenze riproducono in altro ordine le rotazioni:

$$z' = e^{\frac{2\pi}{p} i} \cdot z ; \qquad z' = e^{\frac{2q_2\pi}{p} \cdot i} \cdot z , \ldots , \qquad z' = e \cdot z^{\frac{2q_{\varphi(p)}\pi}{p} \cdot i} .$$

Invece la rotazione:

$$z' = e^{\frac{2h\pi}{p}} \cdot z$$

se h e p ammettono per. m. c. d. δ, ammette il periodo $\frac{p}{\delta}$ come è evidente.

Segue che il sottogruppo formato dalle potenze successive di una rotazione ciclica è di p sostituzioni; e il gruppo è propriamente discontinuo in tutta la forma; e le successive potenze della sostituzione ciclica sono cicliche e hanno per periodo o p o un suo divisore p_i; quelle che hanno a periodo p_i sono $\varphi(p_i)$ e difatti come si sa:

$$\sum \varphi(p_i) = p .$$

Viceversa se vogliamo che un sottogruppo di rotazioni sia propriamente discontinuo tutte le rotazioni debbono essere *cicliche* perchè nel sottogruppo entrano tutte le potenze di una sua sostituzione, ed inoltre deve contenere un numero *finito* di rotazioni. Difatti sia z un elemento della forma di 2^a specie e z', z'', z'''...... i corrispondenti per le sostituzioni del gruppo. Questi elementi si trovano tutti su un medesimo circolo (γ) di centro, il centro di rotazione e però se sono in numero infinito ammettono almeno un elemento limite (Weierstrass), se $z^{(n)}$ $z^{(m)}$ sono due elementi nell'intorno di essi, la rotazione che trasforma $z^{(n)}$ in $z^{(m)}$ è infinitesima. Essa sarà dunque. come si è detto, formata da un numero finito di sostituzioni cicliche di periodi $p_1, p_2, \ldots p_r$ e delle

loro potenze. Esse sono

$$S_1;\ z' = e^{\frac{2\pi i}{p_1}} z, \quad S_2;\ z' = e^{\frac{2\pi i}{p_2}} z, \ldots, \quad S_3;\ z' = e^{\frac{2\pi i}{p_3}} z$$

Se m è il minimo comune multiplo di $p_1, p_2, \ldots p_r$ consideriamo la proiettività

$$S;\ z' = e^{\frac{2\pi i}{m}} z$$

ciclica di ordine m, avremo: $\frac{1}{m} . \frac{m}{p_i} = \frac{1}{p_i}$ e però la S_i è potenza $\frac{m}{p_i}$ della S. Ora anche S appartiene al gruppo. Difatti ponendo $\frac{m}{p_i} = n_i$ si ha $S^{n_i} \equiv S_i$.

Ora $n_1, n_2, \ldots n_r$ hanno per m. c. d. 1 e però per un noto teorema di aritmetica si potranno determinare dei numeri μ_i interi tali che si abbia:

$$\sum \mu_i n_i = 1$$

e però:

$$S_1^{\mu_1} . S_2^{\mu_2} \ldots S_\nu^{\mu_\nu} = S^{\Sigma \mu_i n_i} = S$$

e ciò dimostra l'asserto. Di qui segue il teorema:

« Ogni gruppo propriamente discontinuo di rotazioni che hanno per centro un medesimo elemento della forma di 2ª specie è formato delle successive potenze di una medesima rotazione ciclica di ampiezza minima $\frac{2\pi}{m}$ ».

5. Consideriamo le traslazioni lungo una medesima direzione

$$z' = z + re^{i\omega} \tag{1}$$

r è l'ampiezza della traslazione; se r è infinitesimo la traslazione lo è in tutta la forma di 2ª specie; se r è finito una potenza della (1) è

$$z' = z + nre^{i\omega}$$

e tutte queste potenze formano un gruppo di traslazioni composto d'infinite traslazioni propriamente discontinue in tutta la

forma di 2ª specie eccetto che sulla forma all'infinito: Se z è un elemento i corrispondenti di z cioè z' z'' z'''..... si vanno addensando nell'elemento all'infinito della direzione della traslazione.

Siano due traslazioni

$$(2) \qquad z' = z + re^{i\omega} \qquad (2') \qquad z' = z + se^{i\omega}$$

a) Siano r ed s commensurabili, allora se p e q sono due interi fra di loro primi si ha $\frac{r}{s} = \frac{p}{q}$, e se ρ è la mass. com. misura $r = p \cdot \rho$ $s = q \cdot \rho$, quindi le due sostituzioni sono multiple della sostituzione

$$(3) \qquad z' = z + \rho e^{i\omega}$$

Ora la (3) appartiene al gruppo generato dalle (2) (2') poichè essendo p, q i primi fra di loro esistono due interi m, n tali che:

$$mp + nq = 1 \,; \; mr + ns = \rho \,.$$

Quindi il gruppo generato dalle (2) (2') è identico di quello generato dalla sola traslazione (3).

b) Siano r ed s incommensurabili: si ha se α è irrazionale

$$(2) \qquad z' = z + re^{i\omega} \qquad (2'^{\,\text{bis}}) \qquad z' = z + r\alpha e^{i\omega}$$

Il gruppo generato da queste due trasformazioni è impropriamente discontinuo. Difatti se al solito si svolge α in frazione continua si può trovare una ridotta tale che sia $\alpha - \frac{m}{n} = \frac{\varepsilon}{n}$. essendo ε piccolo od arbitro e però:

$$n\alpha - m = \varepsilon; \quad n\alpha r - mr = \varepsilon r$$

e poichè εr può essere resa piccola ad arbitrio, il gruppo avrebbe una traslazione infinitesima.

Consideriamo ora il gruppo generato da due traslazioni di diversa direzione:

$$(3') \quad S_1; \; z' = z + re^{i\Theta} \qquad (3'') \quad S_2; \; z' = z + \rho e^{i\omega} (\omega \mp\!\!\!\!= \Theta \; (\pi))$$

È facile vedere che questo gruppo non *ha trasformazioni infinitesime*. Difatti le sostituzioni di questo gruppo sono di 3 tipi

(*) S_1^m, (**) S_1^n, (***) $S_1^m . S_2^n$. Poichè si ha per la S_1^{-1} p. e. $z = z' - re^{i\Theta}$ ecc. è chiaro che nelle (3) (3′) possiamo sempre supporre $r, \rho > o$. Ciò posto poichè nessuna delle (*) (**) è infinitesima, rimane a vedere se lo può essere una delle (***) ove nè m, nè n possono essere zero. Si ha:

$$S_1^m . S_2^n ; \quad z' = z + mre^{i\Theta} + n\rho e^{i\omega} = z + \sigma e^{i\tau}$$

ove:

$$\sigma^2 = (mr)^2 + (n\rho)^2 - 2m \cdot nr \cdot \rho \cos(\Theta - \omega)$$

Ora siano in 1° luogo m, n dello stesso segno si ha:

$$\sigma^2 = (mr - n\rho)^2 + 4m \cdot nr\rho \operatorname{sen}^2 \frac{\Theta - \omega}{2}$$

e qualunque siano m, n si avrà $\sigma > 2\sqrt{r\rho} \cdot \operatorname{sen} \frac{\Theta - \omega}{2}$.

Se m, n sono di segno opposto si ha:

$$\rho^2 = (mr + n\rho)^2 - 4m \cdot nr\rho \cos \frac{\Theta - \omega}{2}$$

é qualunque siano m, n si avrà $\sigma > 2\sqrt{r\rho} \cos \frac{\Theta - \omega}{2}$

E ciò dimostra che σ non può divenire infinitesima, e il gruppo non ha traslazioni infinitesime e ciò basta in questo caso per asserire che il gruppo di traslazioni è impropriamente discontinuo in tutta la forma di 2ª specie perchè nella sostituzione:

$$z' = z + \sigma e^{i\tau}$$

qualsiasi elemento della forma di 2ª specie ha dal suo corrispondente la distanza:

$$\operatorname{mod}(z' - z) = \sigma$$

Fa eccezione la forma all'infinito su cui sono gli elementi derivati.

In una traslazione sono trasformate in se stesse tutte le forme di 1ª specie parallele alla direzione della medesima; queste si dicono traiettorie. Siano a le traiettorie della traslazione S_1, b quelle della S_2. I due fasci di forme $(a), (b)$ parallele divi-

dono la forma di 2ª specie in un reticolato di parallelogrammi di lati rispettivamente r, ρ. Dalla stessa costruzione di questo reticolato risulta che se z è un elemento interno, ad uno di questi parallelogrammi p. e. P_i ogni suo corrispondente è fuori di P_i in un altro $p.p.g.$ P_r del reticolato, e che gli elementi dei lati opposti di P_i si corrispondono due a due come anche i vertici.

Ad un reticolato parallelogrammatico della specie suesposta corrisponde un gruppo propriamente discontinuo di traslazioni nella forma Euclidea. Difatti se r, ρ sono le lunghezze dei lati di un p. p. g. P_i; Θ, ω gli angoli che formano con l'asse della σ, le traslazioni che generano il gruppo sono le (3).

Viceversa dato il gruppo mediante le (3) ad esso corrispondano infinite reti di parallelogrammi. Le (3) sono *fondamentali* del gruppo perchè mediante esse si possono costruire tutte le traslazioni del gruppo, ma non sono le sole. Difatti ponendo $re^{i\Theta} = \alpha$ $\rho e^{i\omega} = \beta$ due sostituzioni del gruppo siano

$$(4)\ z' = z + m\alpha + n\beta = z + \gamma \qquad (4')\ z' = z + p\alpha + q\beta = z + \delta$$

Perchè queste possano essere assunte come fondamentali occorre che si possano determinare altri 4 numeri m', n'; p', q' tali che sia

$$m'\gamma + n'\delta = \alpha \qquad p'\gamma + q'\delta = \beta$$

Perchè allora le (3) (3') appartengono al gruppo generato dalle (4) (4') e questi due gruppi coincidono: sostituendo nelle espressioni precedenti al posto di γ, δ i loro valori e annullando i coefficienti di α, β si ottengono le equazioni:

$$m'm + n'p = 1, \quad m'n + n'q = o, \quad p'm + q'p = o, \quad p'n + q'q = 1$$

dalle quali: $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m' & n' \\ p' & q' \end{vmatrix} = 1$

e poichè si tratta di numeri interi si ha:

$$\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m' & n' \\ p' & q' \end{vmatrix} = \mp 1$$

Come si vede dunque vi sono infinite coppie di traslazioni fondamentali e infinite reti parallelogrammiche corrispondenti al gruppo.

In generale sia un gruppo di traslazioni generato da n traslazioni

$$(5)\ z' = z + \alpha_1, \quad (5')\ z' = z + \alpha_2, \quad \ldots \quad (5^{(n)})\ z' = z + \alpha_n$$

Si possono assumere come *fondamentali* quelle fra le (5) che sono indipendenti, ovvero tali che la corrispondente α, non si possa esprimere in funzione lineare a coefficienti razionali delle rimanenti. Se cioè si ha

$$\sum_1^n m'_i \alpha_i = o, \quad \sum_1^n m''_i \alpha_i = o, \quad \ldots \quad \sum_1^n m_i^{(s)} \alpha_i = o$$

il gruppo può essere generato da $n - s$ sostituzioni fondamentali.

Difatti consideriamo i sistemi di equazioni indeterminate di 1° grado:

$$(7) \qquad \sum_1^n m'_i x_i = 1 \quad \sum_1^n m''_i x_i = o \quad \sum_1^n m_i^{(s)} x_i = o$$

$$(7') \qquad \sum_1^n m'_i x_i = o \quad \sum_1^n m''_i x_i = 1 \quad \sum_1^n m_i^{(s)} x_i = o$$

. . . .

$$(7^{(s)}) \qquad \sum_1^n m'_i x_i = o \quad \sum_1^n m''_i x_i = o \quad \sum_1^n m_i^{(s)} x_i = 1$$

Siano:

$$(8) \quad \begin{array}{llllllll} p'_1, & p'_2, & & , p'_n & \text{un sistema di soluzione delle} & & & (7) \\ p''_1, & p''_2, & & , p''_n & » & » & » \quad » & (7') \\ \ldots & & & & & & & \\ p_1^{(s)}, & p_2^{(s)}, & & , p_n^{(s)}, & » & » & » \quad » & (7^{(s)}). \end{array}$$

Avremo in generale:

$$\sum_1^n m_i^{(h)} p_i^{(h)} = 1 \quad \sum_1^n m_i^{(h)} p_i^{(k)} = o \qquad (h \neq k)$$

Consideriamo il determinante

$$D = \begin{vmatrix} p'_1 \; p''_1 \ldots & p_1^{(s)} \; p_1^{(s+1)} \ldots & p_1^{(n-1)} \; y_1 \\ p'_2 \; p''_2 \ldots & p_2^{(s)} \; p_2^{(s+1)} \ldots & p_2^{(n-1)} \; y_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p'_n \; p''_n \ldots & p_n^{(s)} \; p_n^{(s+1)} \ldots & p_n^{(n-1)} \; y_n \end{vmatrix}$$

Le prime s colonne di D sono le soluzioni trovate delle equazioni precedenti: la $(s+1)^a, \ldots (n-1)^a$ sono formate con numeri interi arbitrarii e l'ultima è determinata in modo da avere

$$D = 1$$

ovvero sviluppando rispetto all'ultima colonna:

$$P_1 y_1 + P_2 y_2 + \ldots + P_n y_n = 1 \tag{9}$$

I numeri della $(s+1)^a, \ldots (n-1)^a$ colonna bisogna scegliersi con l'avvertenza che $P_1, P_2, \ldots P_n$ abbiano per m. c. d. 1; allora un sistema di soluzioni della (9) sia

$$y_1 = p_1^{(n)}; \quad y_2 = p_2^{(n)} \ldots \quad y_n = p_n^{(n)}.$$

Poniamo le equazioni:

$$\beta_1 = \sum_1^n P'_i \alpha_i, \quad \beta_2 = \sum_1^n P''_i \alpha_i, \ldots, \quad \beta_n = \sum_1^n P_i^{(n)} \alpha_i$$

ove i $P_i^{'s}$ sono i minori degli elementi di D. Le $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ sono *amplitudini* di traslazioni del gruppo generato dalle (5). Esse possono essere assunte come fondamentali perchè inversamente si ha:

$$\alpha_1 = \sum_1^n p_1^{(i)} \beta_i, \quad \alpha_2 = \sum_1^n p_2^{(i)} \beta_i, \qquad \alpha_n = \sum_1^n p_n^{(i)} \beta_i$$

Sostituendo questi valori di α nelle (6) si ha:

$$\sum_{r=1}^n \beta_r \sum_{i=1}^n m_i^{(n)} p_i^{(r)} = o$$

Per le (8') il coefficiente di β_n è 1 e quello degli altri β fino a β_s incluso è zero e però possiamo scrivere l'equazione prece-

dente essendo i q numeri interi

$$\beta_k = \sum_{i=1}^{n-s} q_i^{(k)} \beta_{s+i} \qquad (k = 1, 2, \ldots s)$$

e queste relazioni ci dicono che tutte le traslazioni del gruppo sono generate dalle traslazioni fondamentali distinte, in numero di $n - s$:

$$z' = z + \beta_{s+1} \ldots \quad z' = z + \beta_n$$

Considerando un gruppo di traslazioni generato dalle fondamentali distinte:

$$S_1 \equiv z' = z + \beta_1; \quad S_2 \equiv z' = z + \beta_2 \ldots \quad S_n \equiv z' = z + \beta_n$$

essendo $\beta_1, \ldots \beta_n$ dei numeri complessi se $n > 3$ il gruppo (discontinuo) contiene delle trasformazioni infinitesime. Questo teorema è in sostanza dovuto allo Iacobi. Esso si rende geometricamente evidente mediante le seguenti considerazioni.

Consideriamo il sottogruppo G' di traslazioni generato dalle S_1, S_2 e consideriamo una delle divisioni parallelogrammatiche della forma di 2ª specie che corrisponde al sottogruppo G'. Sia P_o uno dei parallelogrammi della rete. Se z è un elemento della forma di 2ª specie esiste una traslazione di G' che trasforma z in un elemento z_o di P_o. Sia dunque z un elemento della forma di 2ª specie e consideriamo gli elementi $z', z'', \ldots z^{(n)}, \ldots$ trasformati di z mediante le successive potenze di S_3 che sono in numero infinito. Come si è detto sia T'_k una traslazione di G' e però di amplitudine $p_k\beta_1 + q_k\beta_2$ che trasforma $z^{(k)}$ in $z_o^{(k)}$ interno a P_o. Tutti questi elementi $z_o^{(k)}$ sono distinti, perchè se $z_o^{(h)}, z_o^{(k)}$ coincidessero, il prodotto delle trasformazioni che portano $z_o^{(h)}$ in $z^{(h)}$, e $z_o^{(h)}$ in $z^{(k)}$ rispettivamente sarebbe una potenza di S_3 e però si avrebbe

$$(p_h - p_k)\beta_1 + (q_h - q_k)\beta_2 = l\beta_3$$

mentre si suppongono le (1) indipendenti. Due elementi $z_o^{(h)}$ $z_o^{(k)}$ si trasformano l'uno nell'altro mediante la traslazione del gruppo che si ottiene facendo il prodotto delle tre traslazioni che portano rispettivamente $z_o^{(h)}$ in $z^{(h)}$; $z^{(h)}$ in $z^{(k)}$, $z^{(k)}$ in $z_o^{(k)}$. Ma sic-

come gli elementi $z_o^{(h)}$ in numero infinito sono tutti contenuti in P_o essi ammetteranno almeno un elemento limite e però se $z_o^{(h)}$, $z_o^{(k)}$ sono due elementi corrispondenti in un intorno infinitesimo di P_o. la traslazione che porta $z_o^{(h)}$, in $z_o^{(k)}$ è infinitesima. Iacobi ha enunciato il teorema nella forma aritmetica: se tre numeri complessi β_1, β_2, β_2 sono linearmente indipendenti; si possono determinare tre numeri interi tali che si abbia

$$|\, m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + m_3\beta_3 \,| < \varepsilon$$

ove ε è piccolo a piacere (*).

6. Consideriamo nella forma Euclidea un gruppo discontinuo d'infinite sostituzioni e supponiamo che il gruppo non contenga sostituzioni infinitesime. Intanto il gruppo G non può contenere più di 2 traslazioni distinte in direzioni diverse. Inoltre il sottogruppo delle rotazioni del gruppo G che hanno uno stesso centro sarà formato dalle potenze di una rotazione ciclica di periodo n essendo n un numero intero finito. Sia M un elemento della forma (non appartenente all'assoluto) e consideriamo un intorno di M circolare e di raggio ρ; due ipotesi possono farsi.

a) O esiste un valore di ρ abbastanza piccolo ma finito e tale che nell'interno dell'intorno (ρ) non cadano centri O di rotazione, eccettuato al più M che può essere esso stesso eventualmente un centro di rotazione del gruppo.

b) O per qualsiasi valore di ρ piccolo a piacere esistono nell'interno di (ρ) dei centri O di rotazione in numero infinito. In tal caso, siccome ad ogni centro di rotazione corrisponde un periodo n e questi periodi sono finiti, vi dovranno essere in un intorno quantosivoglia piccolo di M almeno due centri O O' di rotazioni i cui periodi sono uguali, e però ad essi corrispondono due rotazioni del gruppo della medesima ampiezza $\frac{2\pi}{n}$. Siano c, c' gli affissi di O, O' sia z un elemento qualsiasi della forma e z_1, z_2 i corrispondenti per le due trasformazioni, si ha:

$$z_1 - c = e^{\frac{2\pi i}{n}}(z - c) \qquad z_2 - c' = e^{\frac{2\pi i}{n}}(z - c')$$

(*) Vedi Casorati: *Funzioni di variabile complessa.* Vol. 1°.

eliminando z si ha la trasformazione del gruppo che porta z_1 in z_2 della forma

(1)
$$z_2 = z_1 + (c' - c)\ (1 - e^{\frac{2i\pi}{n}})$$

ora se m è l'affisso di M si ha

$$| c' - c | < | c' - m | + | c - m | < 2\rho$$

e siccome ρ può divenire piccolo a piacere la (1) è infinitesima contro il supposto.

Segue che l'ipotesi b) è inammissibile. La a) sola rimane possibile. Di qui risulta:

1° I centri delle rotazioni del gruppo formano un insieme isolato.

2° Nessun elemento della forma di 2ª specie può essere un elemento derivato, e però se i centri di rotazione sono in numero infinito i loro elementi limiti si debbono trovare sulla forma all'infinito.

Ciò posto, si può determinare per un qualsiasi elemento M della forma un intorno circolare (ρ) nell'interno del quale (all'infuori di M al più) non cadano centri di rotazione, e però esiste un limite inferiore per la distanza dei centri di rotazione del gruppo distinti di M, da M. Ciò posto siano M′, M″, M‴, .. $M^{(n)}$, ... i corrispondenti di M per le diverse trasformazioni del gruppo e siano $z, z', z'', \ldots z^{(m)}, \ldots$ gli affissi di M, M′...ecc. Se $z^{(n)}$ è trasformato di z secondo una trasformazione del gruppo. è chiaro che esiste un limite inferiore r della distanza $| z^{(n)} - z |$.

Sia $z^{(n)}$ corrispondente di z mediante una rotazione: si ha

$$z^{(n)} - c_n = e^{\frac{2\pi i}{m_n}} (z - c_n)$$

Ovvero

$$z^{(n)} - z = (c_n - z)\ (1 - e^{\frac{2\pi i}{m_n}})$$

e però si ha

$$| z^{(n)} - z | = | c_n - z |\ | 1 - e^{\frac{2\pi i}{m_n}} |$$

Ora per quanto si è visto esiste un limite inferiore di $|c_n - z|$ finito, e poichè m_n è un numero finito, esisterà ancora un limite inferiore di $\left|1 - e^{\frac{2\pi i'}{m_n}}\right|$; di qui segue che possiamo determinare un numero $r > o$ finito e tale che

$$| z^{(n)} - z | > r$$

qualunque sia z essendo $z^{(n)}$ un qualunque suo elemento corrispondente; ovvero si può determinare di un elemento della forma un intorno nell'interno del quale non cadano altri elementi corrispondenti; ovvero il gruppo è *propriamente discontinuo* in tutta la forma di 2ª specie eccetto la forma all'infinito. Tutti gli elementi corrispondenti di un elemento della forma formano un sistema isolato che si condensa in un elemento della forma all'infinito. Si ha dunque il teorema:

« Un gruppo discontinuo di movimenti privo di trasformazioni infinitesime nella metrica Euclidea è propriamente discontinuo in tutta la forma di 2ª specie eccettuata la forma all'infinito ove lo è impropriamente ».

7. I movimenti in una forma Euclidea fanno parte come sottogruppo, nel gruppo di trasformazioni

$$z' = mz + n \tag{1}$$

Per i movimenti si ha mod. $m = 1$. Se al solito indichiamo con ζ, ζ', μ, ν i complessi coniugati di z', z, m, n avremo per la distanza elementare:

$$ds^2 = dz \cdot d\zeta$$

e però:

$$ds'^2 = m\mu . ds^2 \tag{2}$$

cioè il rapporto di due distanze elementari corrispondenti è costante e indipendente dagli elementi nei quali si considerano queste distanze. Se in un elemento (x, y) si considerano due elementi lineari dx, dy; δx, δy il loro angolo è dato da:

$$\text{tn}\omega = \frac{dx \cdot \delta y - dy \cdot \delta x}{dx \cdot \delta x + dy \cdot \delta y}, \quad \text{sen}\omega = \frac{dx \cdot \delta y - dy \cdot \delta x}{\sqrt{(dx^2 + dy^2) \cdot (\delta x^2 + \delta y^2)}}$$

$$\cos\omega = \frac{dx \cdot \delta x + dy \cdot \delta y}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)\ (\delta x^2 + \delta y^2)}}$$

e da queste uguaglianze si deduce:

$$e^{-2i\omega} = \frac{dz \cdot \delta\zeta}{d\zeta \cdot \delta z}$$

E però se x', y' è l'elemento corrispondente dx', dy'; $\delta x', \delta y'$ le direzioni corrispondenti alle precedenti, ω' il loro angolo, si ha:

$$e^{-2i\omega'} = \frac{dz' \cdot \delta\zeta'}{d\zeta' \cdot dz'} = \frac{dz \cdot \delta\zeta}{d\zeta \cdot \delta z} = e^{-2i\omega}$$

e però a meno di multipli di 2π si ha:

$$\omega' = \omega$$

Quindi due angoli corrispondenti sono direttamente uguali, estraendo la radice della (2) e assumendo il segno $+$, otteniamo:

$$ds' = |m| \cdot ds \tag{3}$$

e la trasformazione si dice *similitudine diretta.*

Oltre le similitudini dirette, si hanno le *similudini inverse.*

$$z' = m\zeta + n \tag{4}$$

le quali se $|m| = 1$ si dicono movimenti di 2ª specie; esse sono trasformazioni proiettive per le quali ancora ha luogo la (2) che estraendo la radice col segno —, dà:

$$ds' = -|m| \cdot ds \cdot$$

Se dx, dy; $\delta x, \delta y$ sono due direzioni, ω il loro angolo, dx', dy'; $\delta x', \delta y'$ le corrispondenti, ω' il loro angolo, si ha:

$$e^{-2i\omega'} = \frac{dz' \cdot \delta\zeta'}{d\zeta' \cdot \delta z'} = \frac{d\zeta \cdot \delta z}{dz \cdot \delta\zeta} = e^{2i\omega}$$

e però a meno di multipli di 2π si ha

$$\omega' = -\omega$$

Le similitudini inverse si ottengono dalle similitudini dirette, *ampliando* il loro gruppo mediante la

$$z' = \zeta$$

la quale, come è evidente, è una simmetria ortagonale o *riflessione* rispetto all'asse delle x. Tutte le similitudini dirette e inverse formano un gruppo, e in questo vi è il sottogruppo *dei movimenti ampliati* formato da tutte le sostituzioni per le quali $|m| = 1$.

I movimenti di 2ª specie sono quindi dati dalla formula:

$$z' = e^{i\Theta}\zeta + n. \tag{5}$$

Fra questi meritano speciale menzione quelli che hanno carattere involutorio e quindi applicati due volte di seguito all'elemento z riportano all'elemento iniziale; però se S è uno di essi si deve avere $S^2 = 1$; cioè, poichè

$$S^2;\ z' = z + \nu e^{i\Theta} + n$$

dovrà essere $\nu e^{i\Theta} + n = o$ ovvero: $\nu e^{\frac{i\Theta}{2}} + n e^{\frac{-i\Theta}{2}} = o$ e però se p è un numero reale:

$$n e^{-i\frac{\Theta}{2}} = p e^{\frac{i\pi}{2}}\ ;\ n = p e^{i\cdot\frac{\Theta+\pi}{2}}$$

e però la trasformazione è della forma:

$$z' = e^{i\Theta}\zeta + p e^{i\frac{\Theta+\pi}{2}}.$$

Gli elementi uniti di questa trasformazione sono dati da:

$$z = e^{i\Theta}\zeta + p e^{\frac{i\Theta+\pi}{2}}\ ;\quad e^{\frac{-i\pi}{2}}\left(z e^{\frac{-i\Theta}{2}} - \zeta e^{\frac{i\Theta}{2}}\right) = p \tag{5}$$

Ciò essi sono in numero infinito e il loro luogo è la forma di 1ª specie

$$y \cos\frac{\Theta}{2} - x \operatorname{sen}\frac{\Theta}{2} = \frac{1}{2}p$$

È facile vedere che queste trasformazioni sono delle simmetrie rispetto alla (6) difatti la trasformazione:

$$z' = e^{\frac{i\Theta}{2}}\left(z'_1 - \frac{1}{2}(q - ip)\right)$$

che muta la (6) nella $y = o$, muta la (5') nella

$$z'_1 = \zeta_1$$

e però « I movimenti di 2ª specie che hanno carattere involutorio sono delle riflessioni rispetto alle forme di 1ª specie della forma di 2ª specie Euclidea ».

Queste riflessioni sono poi le trasformate della riflessione fondamentale $z' = \zeta$ mediante i movimenti della forma di 2ª specie.

Due figure corrispondenti in un movimento di 1ª o di 2ª specie hanno gli angoli e i segmenti corrispondenti uguali, esse si dicono *direttamente uguali* o *congruenti* se corrispondono in un movimento di 1ª specie, *inversamente uguali* se corrispondono in un movimento di 2ª specie.

Relativamente ai movimenti di 1ª specie si hanno le seguenti proprietà evidenti:

a) Due traslazioni sono invertibili.

b) Due rotazioni che hanno il medesimo centro sono invertibili.

c) Due rotazioni infinitesime sono invertibili. Una rotazione infinitesima ha per equazione:

$$z' = e^{id\Theta} \cdot z + dn = z(1 + id\Theta) + dn = z + izd\Theta + dn\,.$$

E se $z' = z + i\,z\,d\,\Theta_1 + dn_1$; $z'' = z' + iz'd\,\Theta_2 + d\,n_2$ sono due movimenti infinitesimi, a meno di infinitesimi di ordine superiore si ha:

$$z'' = z + izd\,(\Theta_1 + \Theta_2) + d(n_1 + n_2)$$

ciò che dimostra il teorema.

8. Consideriamo ora nella forma di 2ª specie una metrica generale. L'elemento lineare sia della forma:

$$ds^2 = du^2 + 2g\,(u)\,dv^2$$

essendo $u =$ cost., $v =$ cost. un sistema ortogonale isotermo. Si ha:

$$ds\delta ds = dud\delta u + 2g\,(u)\,dvd\delta v + dv^2 g'\,(u)\,\delta u$$

e sostituendo per δu, δv i valori:

$$\delta u = \Omega\,(u\,,\,v)\cdot\delta t \qquad \delta v = \Theta\,(u\,,\,v)\cdot\delta t$$

avremo:

$$ds \cdot \delta ds = du \left\{ \frac{d\Omega}{du} du + \frac{d\Omega}{dv} dv \right\} + 2g(u) dv \left\{ \frac{d\Theta}{du} du + \frac{d\Theta}{dv} dv \right\}$$
$$+ g'(u) \, \Omega \, (u, v) \cdot dv^2$$

ovvero ordinando e osservando che $\delta ds = o$

$$\frac{d\Omega}{du} du^2 + \left(2g(u) \cdot \frac{d\Theta}{dv} + g'(u) \, \Omega \, (u, v) \right) dv^2 +$$
$$+ \left(\frac{d\Omega}{dv} + 2g(u) \frac{d\Theta}{du} \right) du \cdot dv = o$$

Da questa equazione si deducono le equazioni di condizione:

$$(1) \quad \frac{d\Omega}{du} = o \qquad (1') \quad 2g(u) \frac{d\Theta}{dv} + g'(u) \cdot \Omega = o$$

$$(1'') \quad \frac{d\Omega}{dv} + 2g(u) \frac{d\Theta}{du} = o$$

Dalla (1) si deduce:

$$(2) \quad \Omega = \varphi(v)$$

Dalle (1') (1''):

$$(3) \, \frac{d\Theta}{dv} = - \frac{1}{2} \frac{d}{du} \left\{ lg \cdot g(u) \right\} \varphi(v) \qquad (3') \, \frac{d\Theta}{du} = - \frac{1}{2g(u)} \cdot \varphi'(v)$$

Da queste si deduce:

$$\varphi(v) \cdot \frac{d^2}{du^2} \left\{ lg \cdot g(u) \right\} = \frac{\varphi''(v)}{g(u)};$$

$$(4) \qquad \frac{\varphi''(v)}{\varphi(v)} = \cdot g(u) \, . \, \frac{d^2}{du^2} \left\{ lg \cdot g(u) \right\}$$

Dalla (4) segue, se m è una costante:

$$(5) \quad \varphi''(v) = m\varphi(v) \qquad\qquad (5') \quad \frac{d^2 lg \cdot g(u)}{du^2} = \frac{m}{g(u)}$$

La (5′) limita le forme di cui è suscettibile $g(u)$.

La (5) integrata dà:

$$(6) \qquad \varphi(v) = c_1 e^{+\sqrt{m}\cdot v} + c_2 e^{-\sqrt{m}\cdot v}$$

Integrando le (3)

$$\Theta = -\varphi'(v) \int^u \frac{du}{2g(u)} + \psi(v)$$

e posto

$$k(u) = -\int^u \frac{du}{2g(u)}$$

avremo:

$$\Theta = k(u)\varphi'(v) + \psi(v)$$

e però

$$\frac{d\Theta}{dv} = k(u)\cdot\varphi''(v) + \psi'(v)$$

e per la (3)

$$(7) \qquad 2g(u) \left\{ k(u)\varphi''(v) + \psi'(v) \right\} + \varphi(v)g'(u) = o$$

Facciamo ora uso della (5′), si ha:

$$(7') \qquad \frac{d}{du}\, lg \cdot g(u) = m \int \frac{du}{g(u)} + q$$

e però sostituendo nella (7) si ha:

$$-\varphi''(v) \int^u \frac{du}{g(u)} + 2\,\psi'(v) + \left\{ m \int^u \frac{du}{g(u)} + q \right\} \varphi(v) = o$$

ovvero:

$$\left\{ -\varphi''(v) + m\varphi(v) \right\} \int^u \frac{du}{(gu)} + 2\,\psi'(v) + q\varphi(v) = o$$

e poichè: $\varphi''(v) = m\varphi(v)$ si ha:

$$2\psi'(v) + q\varphi(v) = o\,; \qquad (8)\ \psi(v) = -\frac{q}{2}\int^v \varphi(v)dv + r$$

e infine si ha lasciando arbitrario il limite inferiore degli integrali:

$$(10)\ \Theta = -\left\{ \frac{\varphi'(v)}{2} \int^u \frac{du}{g(u)} + \frac{q}{2}\int^v \varphi(v)dv \right\}, \qquad (10')\ \Omega = \varphi(v)$$

9. Supponiamo ora che si abbia nella forma di 2ª specie una metrica ellittica, e di aver scelto per sistema coordinato un fascio di geodetiche e i circoli ortagonali. In tal caso si ha, come si sa:

$$ds^2 = du^2 + \text{sen}^2 u \cdot du^2$$

avendo fatto $h = k = 1$ per semplicità; e però $g(u) = \frac{\text{sen.}^2 u}{2}$; $\frac{d^2}{du^2} \text{lg.} g(u) = -\frac{2}{\text{sen.}^2 u}$ e però:

$$m = \cdot g(u) \cdot \frac{d^2}{du^2} lg \cdot g(u) = -1$$

e però per la (6) nel n. 6°:

$$\varphi(v) = c_1 e^{iv} + c_2 e^{-iv} = \text{M} \cos v + \text{N} \,\text{sen}\, v = \text{A} \cos (v + \alpha)$$

e per la (7′)

$$\int^u \frac{du}{g(u)} = q - \frac{d}{du} lg\, g(u) = q - 2 \cot u$$

e sostituendo nelle (10) (10′)

$$\Theta = r - \text{A sen}\,(v + \alpha) \cdot \cot u \qquad \Omega = \text{A} \cos (v + \alpha)$$

e però le equazioni della trasformazione infinitesima sono:

$$\delta u = \text{A} \cos (v + \alpha) \cdot \delta t \qquad \delta v = (r - \text{A sen}\,(v + \alpha) \cdot \cot u) \cdot \delta t\,.$$

Si ha così il sistema differenziale:

$$(1) \qquad \frac{\delta u}{\text{A} \cos (v + \alpha)} = \frac{\delta v}{r - \text{A sen}\,(v + \alpha) \cdot \cot u} = \delta t\,.$$

Per integrare questo sistema differenziale cominciamo dal porre v invece di $v + \alpha$ per semplicità; avremo

$$(1') \qquad \frac{\delta u}{\text{A} \cos v} = \frac{\delta v}{r - \text{A sen}\, v \cdot \cot u} = \delta t\,.$$

Poniamo:

$$(2)\ \xi = tgu \cdot \text{sen}\, v\,,\ \ \eta = tgu \cdot \cos v\,; \frac{\xi}{\eta} = tgv\,; \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = tgu$$

e però differenziando

$$\frac{d\xi}{dt} = tgu \cdot \cos v \frac{dv}{dt} + \frac{\text{sen } v}{\cos^2 u} \cdot \frac{du}{dt} ;$$

$$\frac{d\eta}{dt} = - tgu \text{ sen } v \frac{dv}{dt} + \frac{\cos v}{\cos^2 u} \cdot \frac{du}{dt}$$

e per le (1′):

$$\frac{d\xi}{dt} = r \cdot tgu \cdot \cos v + \text{A sen } v \cos v \, tg^2 u$$

Analogamente si trova:

$$\frac{d\eta}{dt} = - r \, tg \cdot \text{sen } v + \text{A} + \text{A} \cos^2 v \cdot tg^2 u .$$

Ovvero per le (2):

$$\frac{d\xi}{dt} = r \cdot \eta + \text{A} \cdot \xi\eta ; \quad \frac{du}{dt} = - r\xi + \text{A} (1 + \eta^2)$$

Introduciamo una funzione indeterminata z di t ponendo:

$$\xi = x : z \qquad \eta = y : z$$

avremo:

$$z \cdot \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = ryz + \text{A} \, xy ,$$

$$z \frac{dy}{dt} - y \frac{dz}{dt} = - rxz + \text{A} (z^2 + y^2) .$$

Determinando z mediante l'equazione:

$$\frac{dz}{dt} = - \text{A}y \tag{3}$$

avremo:

(3′) $\quad \dfrac{dx}{dt} = ry \qquad$ (3″) $\quad \dfrac{dy}{dt} = - rx + \text{A}z$

Derivando la (3″) si ha per le (3) (3′)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - r^2 y - \text{A}^2 y; \qquad (4) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \beta^2 y = o$$

ove (*) $\beta^2 = r^2 + A^2$. La (4) integrata dà, se M , N sono due costanti arbitrarie:

$$(5) \qquad y = M \cos \beta t + N \,\mathrm{sen}\, \beta t$$

dalle (3) 3′) si ha:

$$(5') \qquad x = r \int y dt = \frac{r}{\beta} (M \,\mathrm{sen}\, \beta t - N \cos \beta t) + C$$

$$(5'') \qquad z = - A \int y dt = - \frac{A}{\beta} (M \,\mathrm{sen}\, \beta t - N \cos \beta t) + D$$

Fra C e D esiste la relazione

$$- rC + AD = o ; \qquad D = \frac{rC}{A}$$

Facendo $t = o$ nelle (5) (5′) (5″) si ricava:

$$M = y_0 ; \quad - \frac{rN}{\beta} + C = x_0 ; \quad \frac{AN}{\beta} + D = z_0$$

ovvero:

$$M = y_0 ; \quad - rN + \beta C = \beta x_0 ; \quad A^2 N + \beta r C = A \beta z_0$$

Risolvendo queste equazioni si ottiene:

$$N (A^2 + r^2) = \beta (A z_0 - r x_0) ; \quad \beta (A^2 + r^2) C = A \beta (A x_0 + r z_0)$$

e per la (*)

$$N \beta = A z_0 - r x_0 ; \qquad \beta^2 C = A (A x_0 + r z_0) .$$

Sostituendo questi valori nelle (5) (5′) (5″) si ottiene:

$$x = \frac{r}{\beta} \left(y_0 \,\mathrm{sen}\, \beta t - \frac{A z_0 - r x_0}{\beta} \cos \beta t \right) + \frac{A}{\beta^2} (A x_0 + r z_0) ;$$

$$y = y_0 \cos \beta t + \frac{A z_0 - r x_0}{\beta} \,\mathrm{sen}\, \beta t$$

$$z = - \frac{A}{\beta} \left(y_0 \,\mathrm{sen}\, \beta t - \frac{A z_0 - r x_0}{\beta} \,\mathrm{sen}\, \beta t \right) + \frac{r}{\beta^2} (A x_0 + r z_0) .$$

Rimpiazzando x, y, z con $\beta^2 x$, $\beta^2 y$, $\beta^2 y$ e ponendo $\beta t = \omega$ si ha

a meno di un fattore comune:

$$(6)\; x \equiv (A^2 + r^2 \cos\omega)\, x_0 + r\sqrt{r^2+A^2}\cdot \operatorname{sen}\omega \cdot y_0 + rA(1-\cos\omega)\, z^0$$

$$y \equiv -r\cdot\sqrt{r^2+A^2}\cdot \operatorname{sen}\omega\cdot x_0 + (r^2+A^2)\cos\omega\cdot y_0 +$$

$$+\sqrt{r^2+A^2}\cdot A\cdot \operatorname{sen}\omega\cdot z_0$$

$$z \equiv rA(1-\cos\omega)\, x_0 - A\sqrt{r^2+A^2}\operatorname{sen}\omega\, y_0 + (r^2+A^2\cos\omega)\, z_0 .$$

Quindi:

$$(7)\; \xi = \frac{(A^2+r^2\cos\omega)\,\xi_0 + r\sqrt{r^2+A^2}\operatorname{sen}\omega\cdot\eta_0 + rA(1-\cos\omega)}{rA(1-\cos\omega)\,\xi_0 - A\sqrt{r^2+A^2}\operatorname{sen}\omega\cdot\eta_0 + (r^2+A^2\cos\omega)}$$

$$\eta = \frac{-r\sqrt{r^2+A^2}\operatorname{sen}\omega\,\xi_0 + (r^2+A^2)\cos\omega\,\eta_0 + A\sqrt{r^2+A^2}\operatorname{sen}\omega}{rA(1-\cos\omega)\,\xi_0 - A\sqrt{r^2+A^2}\operatorname{sen}\omega\,\eta_0 + (r^2+A^2\cos\omega)}$$

10. Consideriamo tutte le trasformazioni per le quali $A = o$; avremo:

$$x \equiv r^2\cos\omega\cdot x_0 + r^2 \operatorname{sen}\omega\, y_0, \quad y \equiv -r^2 \operatorname{sen}\omega\cdot x_0 + r^2\cos\omega\, x_0$$

$$z = r^2 z_0$$

Queste trasformazioni trasformano la forma $z = o$ in se stessa e l'elemento $x = o$ $y = o$ in se stesso e si ha:

$$x^2 + y^2 = r^4(x_0^2 + y_0^2); \quad x^2 + y^2 - mz^2 = r^4 \{ x_0^2 + y_0^2 - mz_0^2 \}$$

Quindi queste trasformazioni trasformano in se stesso l'assoluto e ciascuno dei circoli del fascio:

$$x^2 + y^2 - mz^2 = o$$

cioè per un elemento della forma di 2^a specie ciascun circolo del fascio è una *traiettoria*. È facile vedere che queste trasformazioni che possiamo scriverle:

$$\xi = \cos\omega\,\xi_0 + \operatorname{sen}\omega\,\eta_0 \qquad \eta = -\operatorname{sen}\omega\,\xi_0 + \cos\omega\,\eta_0$$

formano un gruppo: esse si dicono costituire un fascio di rotazioni intorno all'elemento $\xi = o$ $\eta = o$. Le equazioni di questo fascio si possono al solito porre sotto la forma

$$\zeta = \zeta_0 e^{i\omega}$$

se $\qquad \xi + i\eta = \zeta \quad \xi_o + i\eta_o = \zeta_o .$

Ritornando alle (6) del numero precedente se facciamo invece di $x:y:z;\ x:A^2,\ y:A^2,\ z:A^2$ e $r:A=\mu$ si ha:

$$(2)\quad x\equiv(1+\mu^2\cos\omega)\,x_0+\mu\sqrt{1+\mu^2}\,\text{sen}\,\omega\,y_0+\mu\,(1-\cos\omega)\cdot z_0$$

$$y_0=-\mu\sqrt{1+\mu^2}\,\text{sen}\,\omega\,x_0+(1+\mu^2)\cos\omega\,y_0+$$
$$+\sqrt{1+\mu^2}\,\text{sen}\,\omega\cdot z_0$$

$$z\equiv\mu\,(1-\cos\omega)\,x_0-\sqrt{1+\mu^2}\,\text{sen}\,\omega\,y_0+(\mu^2+\cos\omega)\,z_0\,.$$

Queste trasformazioni proiettive sono in numero doppiamente infinito. È poi facile verificare l'identità:

$$x^2+y^2+z^2=(1+2\mu^2+\mu^4)\ (x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2)$$

e quindi queste trasformazioni trasformano l'assoluto in sè stesso. Per trovare le trasformazioni più generali bisogna tornare alle formule:

$$\xi'=tgu\ \text{sen}\,(v+\alpha)\qquad\qquad \mu'=tgu\cos\,(v+\alpha)$$

che svilnppate dànno:

$$\xi'=\xi\cos\alpha+\eta\,\text{sen}\,\alpha\,;\qquad\qquad \eta'=\eta\cos\alpha-\xi\,\text{sen}\,\alpha\,;$$

Da queste formule si deduce:

$$(3)\quad x'=x\cos\alpha+y\,\text{sen}\,\alpha\qquad y'=-x\,\text{sen}\,\alpha+y\cos\alpha\qquad z'=z$$

e risolvendo rispetto a $x,\,y$:

$$(3')\quad x=x'\cos\alpha-y'\,\text{sen}\,\alpha;\qquad y=x'\,\text{sen}\,\alpha+y'\cos\alpha,\qquad z=z'\,.$$

Di qui si ha trasformando le (2) mediante le (3'):

$$x\equiv x'_0\,\{(1+\mu^2\cos\omega)\cos\alpha+\mu\sqrt{1+\mu^2}\,\text{sen}\,\omega\,\text{sen}\,\alpha\,\}+$$
$$+y'_0\,\{-(1+\mu^2\cos\omega)\,\text{sen}\,\alpha+\mu\sqrt{1+\mu^2}\,\text{sen}\,\omega\cos\alpha\,\}+$$
$$+\mu\,(1-\cos\omega)\,z'_0$$

$$y=x'_0\,\{-\mu\sqrt{1+\mu^2}\,\text{sen}\,\omega\cos\alpha+(1+\mu^2)\cos\omega\,\text{sen}\,\alpha\,\}+$$
$$+y'_0\,\{\mu\sqrt{1+\mu^2}\,\text{sen}\,\omega\,\text{sen}\,\alpha+(1+\mu^2)\cos\omega\cos\alpha\,\}+$$
$$+\sqrt{1+\mu^2}\,\text{sen}\,\omega\,z'_0$$

$$z=\mu\,(1-\cos\omega)\,\{x'_0\cos\alpha-y'_0\,\text{sen}\,\alpha\,\}-\sqrt{1+\mu^2}\,\text{sen}\,\omega\,\times$$
$$\times\,\{x'_0\,\text{sen}\,\alpha+y'_0\cos\alpha\,\}+\{\mu^2+\cos\omega\,\}\,z'_0\,.$$

Da queste si deduce per le (3):

$$(4)\ x' = \{ \cos^2\alpha + \cos\omega\,(\mu^2 + \operatorname{sen}^2\alpha) \} x'_0 + \{ \mu\sqrt{1+\mu^2}\operatorname{sen}\omega - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,(1-\cos\omega) \} y'_0 + \{ \mu\cos\alpha\,(1-\cos\omega) + \sqrt{1+\mu^2}\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\alpha \} z'_0$$

$$y' = -\{ \mu\sqrt{1+\mu^2}\operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,(1-\cos\omega) \} x'_0 + \{ \operatorname{sen}^2\alpha + \cos\omega\,(\mu^2 + \cos^2\alpha) \} y'_0 + \{ \sqrt{1+\mu^2}\operatorname{sen}\omega\cos\alpha - \mu\,(1-\cos\omega)\operatorname{sen}\alpha \} z'_0$$

$$z' = \{ \mu\,(1-\cos\omega)\cos\alpha - \sqrt{1+\mu^2}\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\alpha \} x'_0 - \{ \mu\,(1-\cos\omega)\operatorname{sen}\alpha + \sqrt{1+\mu^2}\operatorname{sen}\omega\cos\alpha \} y_0' + \{ \mu^2 + \cos\omega \} z'_0 .$$

E queste sono le più generali formule di trasformazione. Poichè dalle (3)

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

è evidente che anche le (4) trasformano l'assoluto di se stesso. Esse sono in numero triplamente infinito; d'altronde è chiaro che tale è l'ordine d'infinità dei movimenti. Difatti siano le equazioni più generali dei medesimi:

$$x : y : z = f_1(x_0, y_0, z_0; c_1, \ldots c_r) : f_2(x_0, y_0, z_0; c_1, \ldots c_r) : f_3(x_0, y_0, z_0; c_1, \ldots c_r) .$$

Determiniamo quei movimenti tali che ad un elemento x_0, y_0, z_0 corrisponda un determinato elemento x_1, y_1, z_1. Avremo fra le $c_1, c_2, \ldots c_r$ che sono *almeno* tre, le due equazioni

$$x_1 : y_1 : z_1 = f_1(x_0, y_0, z_0; c_1, \ldots c_r) : f_2(x_0, y_0, z_0; c_1, \ldots c_r) : f_3(x_0, y_0, z_0; c_1, \ldots c_r) .$$

Da queste due equazioni deduciamo:

$$c_1 = \varphi_1(x_1, y_1, z_1;\ x_0, y_0, z_0;\ c_3, \ldots c_r)$$
$$c_2 = \varphi_2(x_1, y_1, z_1;\ x_0, y_0, z_0;\ c_3, \ldots c_r)$$

e però tutti i movimenti tali che a (x_0, y_0, z_0), corrisponda l'elemento (x_1, y_1, z_1) dipendono dalle costanti arbitrarie $c_2, \ldots c_r$. Sia $M_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$, $M_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$; ad un elemento fisso

$N_0 \equiv (x'_0, y'_0, z'_0)$ corrisponde un elemento $N_1 \equiv (x'_1, y'_1, z'_1)$ variabile al variare delle $c_3, c_4 \dots c_r$; ma si deve avere per definizione:

$$| M_0 N_0 | = | M_1 N_1 |$$

quindi N_1 non può variare che sul circolo di centro M_1 e però queste residue trasformazioni sono ∞^1, ovvero le $C_3, C_4, \dots C_r$ si riducono ad una *sola* costante arbitraria indipendente; e però le (4) sono le formule più generali dei movimenti nella metrica ellittica: questi movimenti dunque:

1° Sono trasformazioni proiettive.

2° Trasformano in se stesso l'assoluto.

Esse possono scriversi in coordinate non omogenee:

$$(5)\quad \xi = \frac{\left\{\cos^2\alpha + \cos\omega\,(\mu^2 + \operatorname{sen}^2\alpha)\right\}\xi_0 + \left\{\mu\sqrt{1+\mu^2}\operatorname{sen}\omega -}{\left\{\mu(1-\cos\omega)\cos\alpha - \sqrt{1+\mu^2}\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\alpha\right\}\xi_0 -}$$

$$\frac{-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,(1-\cos\omega)\right\}\eta_0 + \mu\cos\alpha\,(1-\cos\omega) + \sqrt{1+\mu^2}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\omega}{-\left\{\mu(1-\cos\omega)\operatorname{sen}\alpha + \sqrt{1+\mu^2}\operatorname{sen}\omega\cos\alpha\right\}\eta_0 + \mu^2 + \cos\omega}$$

$$\eta = \frac{\left\{-\mu\sqrt{1+\mu^2}\operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,(1-\cos\omega)\right\}\xi_0 + \left\{\operatorname{sen}^2\alpha +\right.}{\left\{\mu(1-\cos\omega)\cos\alpha - \sqrt{1+\mu^2}\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\alpha\right\}\xi_0 -}$$

$$\frac{\left.+\cos\omega\,(\mu^2 + \cos^2\alpha)\right\}\eta_0 + \sqrt{1+\mu^2}\operatorname{sen}\omega\cos\alpha - \mu(1-\cos\omega)\operatorname{sen}\alpha}{-\left\{\mu(1-\cos\omega)\operatorname{sen}\alpha + \sqrt{1+\mu^2}\operatorname{sen}\omega\cos\alpha\right\}\eta_0 + \mu^2 + \cos\omega}$$

Nelle (4) facciamo $\mu = o$ avremo (togliendo gli apici)

$$(6)\quad x = \left\{\cos^2\alpha + \cos\omega\operatorname{sen}^2\alpha\right\}x_o - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,(1-\cos\omega)\,y_o + \operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\alpha\,z_o$$

$$y = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,(1-\cos\omega)\,x_o + (\operatorname{sen}^2\alpha + \cos\omega\cos^2\alpha)\,y_o + \operatorname{sen}\omega\cos\alpha\,z_o$$

$$z = -\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\alpha\,x_o - \operatorname{sen}\omega\cos\alpha\,y_o + \cos\omega\,z_o .$$

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$ si ha:

$$(7)\quad x = \cos\omega\,x_o + \operatorname{sen}\omega\,z_o;\quad y = y_o;\quad z = -\operatorname{sen}\omega\,x_o + \cos\omega\,z_o$$

e da queste si ricava:

$$(6)\qquad x^2 + z^2 - ky^2 = x_o^2 + z_o^2 - ky_o^2 .$$

Quindi le (7) in numero ∞' trasformano in se stesso ciascun circolo del fascio (8) e rappresentano delle rotazioni intorno all'elemento $(x = o \quad z = o \quad y = 1)$.

Sia (*) $x_o - \lambda z_o = o$ una forma di 1ª specie per il centro di rotazione e sia (**) $x - \mu z = o$ la corrispondente per una rotazione (7), sostituendo nella sua equazione le (7) si ha

$$\cos\omega\, x_o + \operatorname{sen}\omega\, z_o - \mu\,(\cos\omega\, z_o - \operatorname{sen}\omega\, x_o) = o$$

e paragonando questa equazione con la (*) si ha:

$$\lambda = \frac{\mu\cos\omega - \operatorname{sen}\omega}{\cos\omega + \mu\operatorname{sen}\omega}$$

L'angolo delle due forme (**) (*) è dato da:

$$tg\varphi = \frac{\mu - \lambda}{1 + \lambda\mu} = \frac{\mu - \dfrac{\mu\cos\omega - \operatorname{sen}\omega}{\mu\operatorname{sen}\omega + \cos\omega}}{\dfrac{\mu\cos\omega - \operatorname{sen}\omega}{\mu\operatorname{sen}\omega + \cos\omega}\cdot\mu + 1} = \frac{(1+\mu^2)\operatorname{sen}\omega}{(1+\mu^2)\cos\omega} = tg\omega$$

e però possiamo porre $\varphi = \omega$; segue che ω è l'angolo di rotazione.

Vediamo se vi sono forme di 1ª specie che si trasformano in se stesse: Dovremo avere:

$$m(\cos\omega\, x_o + \operatorname{sen}\omega\, z_o) + ny_o + p(\cos\omega\, z_o - \operatorname{sen}\omega\, x_o) =$$
$$= \rho\,(mx_o + ny_o + pz_o)$$

quindi:

$$m\cos\omega - p\operatorname{sen}\omega = \rho m; \quad n = \rho n; \quad m\operatorname{sen}\omega + p\cos\omega = \rho p$$

dalla 2ª uguaglianza si deduce $o : \rho = 1 \quad o : n = o$; per $\rho = 1$ si ha

$$m(\cos\omega - 1) - p\operatorname{sen}\omega = o \qquad m(\operatorname{sen}\omega - 1) + p\cos\omega = o$$

e siccome il determinante delle equazioni non nullo è in generale si ha:

$$p = o \quad m = o$$

e si ha la forma $y = o$ come è evidente. La $n = o$ poi dà:

$$m\operatorname{sen}\omega + p(\cos\omega - \rho) = o \qquad m(\cos\omega - \rho) - p\operatorname{sen}\omega = o$$

dalle quali eliminando m, p:

$$\operatorname{sen}^2\omega + (\cos\omega - \rho)^2 = o; \qquad \rho - \cos\omega = \mp i \operatorname{sen}\omega$$

$$\text{e però: } \rho_1 = e^{i\omega} \qquad \rho_2 = e^{-i\omega} \qquad m : p = \pm i$$

e le due forme pel centro di rotazione sono:

$$x - iz = o; \qquad x + iz = o; \qquad x^2 + z^2 = o$$

Ovvero le tangenti condotte dall'elemento $x = o \;\; z = o \;\; y = 1$ all'assoluto $x^2 + y^2 + z^2 = o$.

Ritorniamo ora alle formule generali (4) che possiamo scriverle:

$$x = \cos^2\alpha\, x_o - \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\, y_o + \mu \cos\alpha\, z_o + \cos\omega\,\big((\mu^2 + \operatorname{sen}^2\alpha)\, x_o + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, y_o - \mu\cos\alpha\, z_o\big) + \operatorname{sen}\omega\,\big(\mu\sqrt{1+\mu^2}\, y_o + \sqrt{1+\mu^2}\operatorname{sen}\alpha\, y_o\big)$$

$$y = -\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, x_o + \operatorname{sen}^2\alpha\, y_o - \mu\operatorname{sen}\alpha\, z_o + \cos\omega\,\big(x_o \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + (\mu^2 + \cos^2\alpha)\, y_o + \mu\operatorname{sen}\alpha\, z_o\big) - \operatorname{sen}\omega\,\big(\mu\sqrt{1+\mu^2}\, x_o - \sqrt{1+\mu^2}\cos\alpha\, z_o\big)$$

$$z = \mu\cos\alpha\cdot x_o - \mu\operatorname{sen}\alpha\, y_o + \mu^2 z_o + \cos\omega\,\big(-\mu\cos\alpha\cdot x_o + \mu\operatorname{sen}\alpha\cdot y_o + z_o\big) - \operatorname{sen}\omega\cdot\big(\sqrt{1+\mu^2}\operatorname{sen}\alpha\cdot x_o + \sqrt{1+\mu^2}\cos\alpha\, y_o\big).$$

Da queste uguaglianze si deducono le seguenti altre:

$$x\cdot\operatorname{sen}\alpha + y\cdot\cos\alpha = (1+\mu^2)\cos\omega\,(\operatorname{sen}\alpha\cdot x_o + \cos\alpha\cdot y_o) + \sqrt{1+\mu^2}\operatorname{sen}\omega\cdot(\mu\,[y_o\operatorname{sen}\alpha - x_o\cos\alpha] + z_o).$$

$$\mu\,(-\cos\alpha\cdot x + \operatorname{sen}\alpha\cdot y) + z = \cos\omega\,(1+\mu^2)\,(\mu\,[-\cos\alpha\, x_o + \operatorname{sen}\alpha\, y_o] + z_o) - \operatorname{sen}\omega\cdot(1+\mu^2)^{\frac{3}{2}}\,(-\operatorname{sen}\alpha\, x_o + \cos\alpha\, y_o).$$

$$x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha + \mu z = (1+\mu^2)\,(x_o\cos\alpha - y_o\operatorname{sen}\alpha + \mu z_o).$$

Posto:

$$X = (1+\mu^2)\,(x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha);$$

$$Y = \sqrt{1+\mu^2}\,(\mu\,[-\cos\alpha\cdot x + \operatorname{sen}\alpha\cdot y] + z);$$

$$Z = x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha + \mu z.$$

Avremo:

$$(9) \qquad \frac{X}{1+\mu^2} = \cos\omega \,.\, X_o + \operatorname{sen}\omega \cdot Y_o;$$
$$\frac{Y}{1+\mu^2} = \cos\omega \cdot Y_o - \operatorname{sen}\omega\, X_o$$
$$\frac{Z}{1+\mu^2} = Z_o$$

Come si vede la trasformazione generale è una rotazione il cui centro è dato dalle equazioni:

$$X = o \qquad Y = o$$

che risolute dànno per le coordinate del medesimo;

$$(10) \qquad x : y : z = \cos\alpha : -\operatorname{sen}\alpha : \mu.$$

Le tre forme di 1ª specie unite sono:

$$X + iY = o \qquad X - iY = o \qquad Z = o$$

ovvero:

$$(11) \qquad x(\operatorname{sen}\alpha - i\mu\cos\alpha) + y\,(\cos\alpha + i\mu\operatorname{sen}\alpha) + iz = o$$
$$x(\operatorname{sen}\alpha + i\mu\cos\alpha) + y(\cos\alpha - i\mu\operatorname{sen}\alpha) - iz = o$$
$$x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha + \mu z = o\,.$$

11. Se x_1, x_2, x_3 sono le coordinate omogenee di un elemento della forma di 2ª specie e G un gruppo di trasformazioni proiettive, siano

$$S_1;\ x'_1 : x'_2 : x'_3 = \sum a_{1h}\, x_h : \sum a_{2h}\, x_h : \sum a_{3h}\, x_h$$
$$S_2;\ x'_1 : x'_2 : x'_3 = \sum b_{1h}\, x_h : \sum b_{2h}\, x_h : \sum b_{3h}\, x_h$$

due trasformazioni del gruppo, consideriamo la $S \equiv S_1 \,.\, S_2$, avremo:

$$S;\ x'_1 : x'_2 : x'_3 = \sum c_{1h}\, x_h : \sum c_{2h}\, x_h : \sum c_{3h}\, x_h$$

ove si è posto

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\, b_{kj}$$

Se consideriamo la trasformazione $S' \equiv S_2 . S_1$ si avrà

$$S';\ x'_1 : x'_2 : x'_3 = \sum c'_{1h}\, x_h : \sum c'_{2h}\, x_h : \sum c'_{3h}\, x_h$$

ove si è posto

$$c'_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ki}\, b_{jk}$$

e quindi il prodotto di due sostituzioni non è in generale permutabile. Però vi sono due casi importanti nei quali la permutabilità ha luogo e sono:

1° Quando le due trasformazioni hanno i medesimi elementi uniti.

2° Quando sono infinitesime.

Nel 1° caso assumendo come elementi di riferimento gli elementi uniti si ha:

$$b_{ik} = o \ (i \neq k) \quad a_{ik} = o \ (i \neq k)$$

e però: $\qquad c_{ik} = c'_{ki} = o \ (k \neq i) \qquad c_{ii} = c'_{ii} = a_{ii} \cdot b_{ii}\,.$

Nel 2° caso si ha

$$a_{ik} = \delta\alpha_{ik}\, (i \neq k) \quad b_{ik} = \delta\beta_{ik}\, (i \neq k) \quad a_{ii} = 1 + \delta\alpha_{ii}\,, \quad b_{ii} = 1 + \delta\beta_{ii}$$

e però a meno di infinitesimi di ordine superiore si ha

$$c_{ij} = c'_{ij} = \delta\alpha_{ij} + \delta\beta_{ij} \qquad\qquad c_{ii} = c'_{ii} = 1 + \delta\alpha_{ii} + \delta\beta_{ii}$$

Nel caso dei movimenti possiamo dire. Due movimenti del gruppo sono permutabili se sono rotazioni aventi il medesimo centro e se sono infinitesimi. Una rotazione intorno ad un elemento della forma di 2ª specie si può considerare come rotazione della metrica Euclidea che ha per assoluto la polare dell'elemento rispetto all'assoluto della metrica elittica. Quindi relativamente al sottogruppo di movimenti intorno ad un medesimo centro, non si ha che ripetere quello che è stato detto sopra. Un gruppo di rotazioni concentriche o contiene delle rotazioni infinitesime o è formato dalle successive potenze di una rotazione periodica o *ciclica* di ampiezza $\dfrac{2\pi}{m}$.

12. Oltre i movimenti vi sono altre trasformazioni proiettive che lasciano invariato l'assoluto e quindi l'elemento metrico; queste omografie di per se stesse non formano gruppo. Se al solito l'equazione dell'assoluto è:

$$x^2 + y^2 + z = o$$

Consideriamo la trasformazione proiettiva

$$x' = \alpha x \qquad y' = \beta y \qquad x' = \gamma . z$$

e scriviamo la condizione perchè per essa l'assoluto si trasformi in se stesso; si deve avere:

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = k\,(x^2 + y^2 + z^2)$$

e però:

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2$$

e però a parte la trasformazione identica, si ha uno dei 3 casi:

$$\alpha = -\beta = \gamma\,; \qquad -\alpha = \beta = \gamma\,; \qquad \alpha = \beta = -\gamma$$

e però si hanno le 3 trasformazioni:

$$(1)\ x' = x\,,\ y' = -y,\ z' = z; \quad (1')\ x' = -x',\ y' = y\,,\ z' = z;$$
$$(1'')\ x' = x\,,\ y' = y\,,\ z' = -z\,.$$

Consideriamo ad esempio la $(1'')$ si ha per essa: $x' : y' = x : y$ e pero ogni forma di 1ª specie per $x = o\,, y = o$ si trasforma se stessa. $\frac{y'}{z'} = -\frac{y}{z}$ e però ogni forma di 1ª specie $y' + \lambda z' = o$ per $y = o$ $z = o$, si trasforma nella coniugata armonica $y - \lambda z = o$ rispetto alle forme $y = o\,, z = o$. La $(1'')$ è quindi una omologia armonica di centro $(x = o \ \ y = o)$ e di asse $z = o$. Siffatta trasformazione si dice una *simmetria* rispetto all'asse $z = o$, così le 1), 1') esprimono delle simmetrie rispetto agli assi $y = o$; $x = o$. In generale data una forma di 1ª specie a si può considerare una simmetria rispetto ad a come asse, basta considerare il polo A di a rispetto all'assoluto e l'omologia armonica di centro A e di asse a. Vi sono altre trasformazioni proiettive oltre i movimenti e le simmetrie che lascino invariato l'elemento metrico? Evidentemente no, perchè una siffatta trasformazione

deve mutare l'assoluto in se stesso e però essa deve porre sull'assoluto una trasformazione proiettiva di elementi uniti E , F. La (E, F) è una delle forme unite della trasformazione e le tangenti e, f in E, F all'assoluto concorrono in O 3° elemento unito. Ora, o la (E, F) non ha altri elementi uniti che E ed F e allora si ha una rotazione di centro O, o la (E, F) ha tutti i suoi elementi uniti e allora si ha una simmetria. Le simmetrie non formano gruppo; in una simmetria gli angoli corrispondenti sono inversamente uguali; due simmetrie dànno un movimento. Le simmetrie sono in numero ∞^2 poichè dato l'asse, ciascuna di esse è determinata. Se $a:b:c$ è un elemento della forma di 2ª specie la forma polare rispetto all'assoluto è:

$$ax + by + cz = o \tag{1}$$

Due forme per $a:b:c$ hanno per equazioni:

$$(b\nu - c\mu)\, x + (c\lambda - a\nu)\, y + (a\mu - b\lambda)\, z = o;$$
$$(b\nu' - c\mu')\, x + (c\lambda' - a\nu')\, y + (a\mu' - b\lambda') = o$$

e la condizione di ortogonalità è:

$$\begin{gathered} a^2 (\nu\nu' + \mu\mu') + b^2 (\lambda\lambda' + \mu\mu') + c^2 (\mu\mu' + \lambda\lambda') - \\ - bc (\mu\nu' + \nu\mu') - ca (\nu\lambda' + \lambda\nu') - ab (\lambda\mu' + \mu\lambda') = o \end{gathered} \tag{2}$$

Se si pone $\lambda = 1$, $\mu = o$, $\nu = o$ l'equazione (2) diviene

$$(c^2 + b^2)\, \lambda' - ca\nu' - ab\mu' = o$$

equazione evidentemente soddisfatta per $\lambda' = o$, $\nu' = -b$, $\mu' = c$. Si hanno così le due forme ortogonali per $a:b:c$

$$cy - bz = o \qquad -x\,(b^2 + c^2) + a\,(by + cz) = o$$

E le equazioni della simmetria rispetto all'asse (1) divengono:

$$cy' - bz' = cy - bz;$$
$$-(b^2 + c^2)\, x' + a\,(by' + cz') = -(b^2 + c^2)\, x + a\,(by + cz);$$
$$ax' + by' + cz' = -ax - by - cz .$$

Posto:

$$cy - bz = \mathrm{A} \qquad -(b^2 + c^2)\, x + a\,(by + cz) = \mathrm{B}$$
$$-ax - by - cz = \mathrm{C} .$$

Si ha il sistema di equazioni:

$$cy' - bz' = A \qquad -(b^2 + c^2)\,x' + aby' + acz' = B$$
$$ax' + by' + cz' = C$$

che risoluto rispetto ad x', y', z' dà:

$$x' = \frac{B + aC}{a^2 + b^2 + c^2}\,,\quad y' = \frac{a\,(Ac \cdot a + Bb) + (b^2 + c^2)\,(Ac + Cb)}{(a^2 + b^2 + c^2)\;(b^2 + c^2)}\,,$$

$$z' = \frac{(b^2 + c^2)\,(Cc - Ab) + (Bc + Ab)\,a}{(a^2 + b^2 + c^2)\;(b^2 + c^2)}$$

e sostituendo ad A, B, C i loro valori si ottiene:

$$x' = \frac{(-a^2 + b^2 + c^2)\,x - 2a\,(by + cz)}{a^2 + b^2 + c^2}\,,$$

$$y' = \frac{(a^2 - b^2 + c^2)\,y - 2b\,(ax + cz)}{a^2 + b^2 + c^2}\,,$$

$$z' = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)\,z - 2c\,(ax + by)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

e ponendo per semplicità:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \alpha\,,\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b + c^2}} = \beta\,,$$

$$\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = ;\ \ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

Si ottiene:

$$(3)\qquad \begin{aligned} x' &= (-\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\,x - 2\alpha\,(\beta y + \gamma z)\,,\\ y' &= (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)\,y - 2\beta\,(\alpha x + \gamma z)\,,\\ z' &= (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)\,z - 2\gamma\,(\alpha x + \beta y) \end{aligned}$$

e queste sono le formule di una simmetria generale rispetto all'asse:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = o$$

13. Date due forme di 2^a specie una (II) Ellittica sulla quale si consideri un sistema di coordinate lineari non omogenee (ξ, η) e una forma (II_1) Euclidea sulla quale si consideri un sistema

di coordinate Cartesiano ortogonale (x, y), si può porre una corrispondenza puntuale fra (II), (II$_1$) in modo che al circolo (1) $\xi^2 + \eta^2 + 1 = o$ di (II) (assoluto) corrisponda il circolo (2) $x^2 + y^2 + 1 = o$ di (II$_1$) e alle forme di 1ª specie di (II) la rete di circoli che ha per circolo fondamentale il circolo (2). Abbiamo visto inoltre che ad ogni elemento di (II) corrispondono due elementi di (II$_1$) che sono in involuzione rispetto al circolo (2). Le formule di trasformazione sono:

$$(3) \qquad x = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1} + 1} \qquad y = \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + 1} + 1};$$

$$(3') \qquad \xi = \frac{2x}{1 - (x^2 + y^2)} \qquad \eta = \frac{2y}{1 - (x^2 + y^2)}$$

Possiamo aggiungere che agli assi $\xi = o$ $\eta = o$ di (II) corrispondono rispettivamente gli assi $x = o$, $y = o$ di (II$_1$). Alle $x =$ cost. $y =$ cost. di (II$_1$) corrispondono in (II) due sistemi ortogonali di circoli che come è noto assunto come sistema coordinato dà all'elemento lineare la forma Riemanniana:

$$\delta u^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{[1 + (x^2 + y^2)]^2}$$

Introducendo gl'immaginarii:

$$\xi + i\eta = \zeta, \ \xi - i\eta = \zeta_o; \qquad x + iy = z, \ x - iy = z_o$$

le formule precedenti potremo scriverle

$$(5) \qquad z = \frac{\zeta}{\sqrt{1 + \zeta\zeta_o} + 1}, \qquad (5') \qquad \zeta = \frac{2z}{1 - zz_o};$$

$$(6) \qquad \delta u^2 = \frac{dz \cdot dz_o}{(1 + zz_o)^2}$$

I circoli della forma Euclidea (II$_1$) hanno per equazione

$$(7) \qquad Azz_o + Bz + B_oz_o + D = o$$

ove A e D sono reali B, B$_o$ immaginarii coniugati: Tra questi, i circoli della rete che hanno per circolo fondamentale il circolo $zz_o + 1 = o$ hanno per equazione come si sa

$$(8) \qquad Bz + B_oz_o + A(1 - zz_o) = o$$

A questi corrispondono le forme di 1ª specie della forma (Π) e però in essa la (8) può essere considerata come l'equazione di una forma di 1ª specie nel sistema coordinato (z, z_0)
Ciò posto consideriamo le sostituzioni del tipo:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \tag{9}$$

ove a, b, c, d sono delle quantità complesse qualsiansi.
Se il determinante $ad - bc \neq o$ potremo sempre supporre $ad - bc = 1$, ciò che faremo di qui innanzi. Queste trasformazioni che prendono il nome di *Sostituzioni lineari* o *Kleiniane* formano evidentemente un gruppo, il quale contiene la trasformazione identica $a = d = 1$, $b = c = o$ e le trasformazioni infinitesime per cui si ha

$$|b| < \varepsilon, \quad |c| < \varepsilon, \quad |a - d| < \varepsilon \tag{10}$$

Ovvero, poichè si ha $ad - 1 = bc$, $|ad - 1| = |bc| < \varepsilon^2$ e però: $\lim(a - d) = o$: $\lim a = \lim d$; $\lim(ad - 1) = o$; $\lim ad = 1$, ovvero $\lim a = \mp 1$, $\lim b = \mp 1$; assumendo il segno $+$ si hanno le altre condizioni

$$|b| < \varepsilon \quad |c| < \varepsilon \qquad |a - 1| < \varepsilon \quad |d - 1| < \varepsilon \tag{10'}$$

che possono essere sostituite alle (10).

Queste sostituzioni interpretate in (Π_1) godono di due proprietà importanti.

a) Sono conformi (isogonali).

b) Trasformano circoli (e forme di 1ª specie) in circoli (omocicliche)

Per la (*a*) ricordiamo che in una forma Euclidea, l'angolo di due direzioni dz, δz uscenti da un elemento (z) è dato dà:

$$e^{2i\omega} = \frac{dz\, \delta z_0}{dz_0 \cdot \delta z} \tag{11}$$

e se in generale la sostituzione è:

$$z' = f(z)$$

avremo:

$$e^{2i\omega'} = \frac{dz' \delta z'_o}{dz'_o \cdot \delta z'} = \frac{f'(z) f'_o(z_o)\, dz\, \delta z_o}{f'_o(z_o) f'(z)\, dz_o\, \delta z} = e^{2i\omega}$$

Osserviamo di passaggio che la (11) dà anche l'angolo delle due direzioni dz, δz_o per (z) nella forma Ellittica (II).

Per la (6) osserviamo che eseguendo la sostituzione nella (7) si ha:

$$\begin{aligned}
(12) \qquad & Az'z'_o + Bz' + B_o z'_o + D = \\
& = (cz + d)^{-1} (c_o z_o + d_o)^{-1} (A'zz_o + B'z + B'_o z_o + D') \\
& A' = Aaa_o + Bac_o + B_o a_o c + Dcc_o, \\
& B' = Aab_o + Bad_o + B_o cb_o + Dcd_o, \\
& D' = Abb_o + Bbd_o + B_o b_o d + Ddd_o.
\end{aligned}$$

Queste formule (12) fanno vedere che i coefficienti del circolo trasformato sono funzioni lineari di quelli del circolo dato e però esse trasformano un sistema lineare di circoli in un sistema lineare di circoli e in particolare una rete di circoli in una rete di circoli. Se il circolo fondamentale della rete è reale si ha la proprietà:

c) Una sostituzione lineare trasforma un sistema di circoli ortogonali rispetto ad un circolo dato, in un sistema di circoli ortogonali al corrispondente.

Siccome poi una rete di circoli individua una riflessione rispetto al circolo fondamentale si ha:

d) Una sostituzione lineare trasforma una riflessione o simmetria rispetto ad un circolo (o forma di 1ª specie) in una riflessione o simmetria rispetto al circolo corrispondente.

Ricordiamo che se l'equazione di un circolo è posta sotto la forma:

$$(z - a)(z_o - a_o) + \sigma = o$$

l'equazione della simmetria è

$$(13) \qquad z' = a + \frac{-\sigma}{z_o - a_o}$$

l'equazione della rete che individua questa simmetria è:

(14) $\quad B(z-a)+B_o(z_o-a_o)+A\left(\sigma-[z-a][z_o-a_o]\right)$

Difatti è facile vedere che ogni circolo della rete è trasformato in se stesso dalla riflessione (13).

e) Se z_1, z_2, z_3, z_4 sono 4 elementi di (Π_1) e z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 i 4 corrispondenti ha luogo evidentemente la relazione

$$(15) \qquad (z'_1, z'_2, z'_3, z'_4)=(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

f) Essa ha due elementi uniti dati dell'equazione

$$(16) \qquad cz^2+z(d-a)-b=o \qquad (ad-bc=1)$$

Il discriminante della medesima è:

$$(d-a)^2+4bc=(d+a)^2-4$$

Ora due casi possono darsi.

1° Il discriminante sia nullo, cioè si abbia (17) $(a+d)^2=4$. In tal caso i due elementi uniti coincidono in uno solo: sia α il suo affisso. Allora si hanno le relazioni

$$z'=\frac{az+b}{cz+d}, \qquad \alpha=\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$$

Da queste si deduce

$$z'-\alpha=\frac{z-\alpha}{(c\alpha+d)(cz+d)};$$

$$\frac{1}{z'-\alpha}=\frac{(c\alpha+d)(cz+d)}{z-\alpha}=\frac{p}{z-\alpha}+q$$

da questa relazione si ricava:

$$q=c(c\alpha+d), \qquad p=(ca+d)^2$$

Ora dalla (16) nel nostro caso si ricava:

$$\alpha=\frac{a-d}{2c}; \quad c\alpha+d=\frac{a+d}{2}$$

e per la (17) si ricava infine:

$$\frac{1}{z'-\alpha}=\frac{1}{z-\alpha}+c. \tag{18}$$

La sostituzione in tal caso si dice *parabolica.*

2° Sia $(a+d)^2 \neq 4$ in tal caso gli elementi doppi sono distinti e siano α, β, si avrà se z, z'; z_1, z'_1 sono due coppie di elementi corrispondenti:

$$(z', z'_1, \alpha, \beta)=(z, z_1, \alpha, \beta)$$

e però

$$\frac{z'-\alpha}{z'-\beta}=\mathrm{K}\frac{z-\alpha}{z-\beta} \tag{19}$$

ove sia:

$$\mathrm{K}=\frac{z'_1-\alpha}{z'_1-\beta}:\frac{z_1-\alpha}{z_1-\beta}$$

Ora se la (19) la poniamo sotto la forma $z'=\dfrac{az+b}{cz+d}$ troviamo

$$\mathrm{K}=\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}$$

e per la (16) che ha per radici α, β:

$$\mathrm{K}=\frac{a+d+\sqrt{(a+d)^2-4}}{a+d-\sqrt{(a+d)^2-4}}$$

Ora possiamo distinguere (3) casi

(a) Sia $(a+d)^2>4$ e però $(a+d)^2$ è reale e positivo e K è reale e positivo; in tal caso la sostituzione si dice *iperbolica.*

(b) Sia $o<(a+d)^2<4$, K è il quoziente di due numeri immaginarii coniugati e però è immaginario e a modulo 1; se $(a+d)=o$, $\mathrm{K}=-1$. In tal caso la sostituzione si dice *ellittica,* essa è della forma:

$$\frac{z'-\alpha}{z'-\beta}=e^{i\varphi}\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

φ si dice *amplitudine* della sostituzione.

(*c*) Se infine $(a+d)^2$ è immaginario o negativo, K lo è anche e la sostituzione si dice *lossodromica*. Essa è della forma:

$$\frac{z'-\alpha}{z'-\beta}=\rho e^{i\varphi}\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

Trasformando la sostituzione in modo da assumere gli elementi doppi di affissi o, ∞ essa prende la forma

$$z'=kz$$

ove $k=r^2$, $k=e^{i\varphi}$, $k=\rho e^{i\varphi}$ a seconda che è iperbolica, ellittica, lossodromica.

14. Supponiamo dati nella forma (II_1) due circoli di equazioni:

$$(1)\quad (z-\alpha)(z_o-\alpha_o)=\rho^2 \qquad (2)\quad (z-\beta)(z_o-\beta_o)=\sigma^2$$

E le riflessioni corrispondenti

$$(1')\quad \mathrm{I}_1\equiv z'-\alpha=\frac{\rho^2}{z_o-\alpha_o}; \qquad (2')\quad \mathrm{I}_2\equiv z'-\beta=\frac{\sigma^2}{z_o-\beta_o}$$

Applichiamo ad un elemento z, successivamente I_1, I_2 si ha la sostituzione

$$(3)\quad z'=\frac{(\beta(\alpha_o-\beta_o)+\sigma^2)z+\rho^2\beta-\alpha(\beta(\alpha_o-\beta_o)+\sigma^2)}{z(\alpha_o-\beta_o)+\rho^2-\alpha(\alpha_o-\beta_o)}$$

sostituzione lineare ove:

$$a=\beta(\alpha_o-\beta_o)+\sigma^2, \qquad d=\rho^2-\alpha(\alpha_o-\beta_o) \text{ e però:}$$

$$a+d=\sigma^2+\rho^2-(\alpha_o-\beta_o)(\alpha-\beta)=\sigma^2+\rho^2-\delta^2$$

ove δ è la distanza dei centri; e inoltre:

$$b=\rho^2\beta-\alpha\beta(\alpha_o-\beta_o)-\alpha\sigma^2; \quad c=\alpha_o-\beta_o: \quad ad-bc=\rho^2\sigma^2$$

Se vogliamo che sia $ad-bc=1$; dividiamo tutti i coefficienti della sostituzione per $\rho\sigma$ e avremo:

$$(a+d)^2-4=\frac{(\sigma^2+\rho^2-\delta^2)^2-4\rho^2\sigma^2}{\rho^2\sigma^2}$$

Ora:

1° Se $(a+d)^2 = 4$ si ha $\sigma^2 + \rho^2 - \delta^2 = \pm 2\rho\sigma$; $\delta^2 = (\sigma \pm \rho)^2$ e però i due circoli si toccano e la sostituzione risultante è parabolica. In tal caso come è evidente l'elemento unito della sostituzione è l'elemento di contatto. Tutti i circoli tangenti in questo elemento alla congiungente i centri dei circoli (1) (2) sono trasformati ciascuno in se stesso dalle (1'), (2') e però dalla (3).

2° Se $(a+d)^2 > 4$ si ha $\rho^2 + \sigma^2 - \delta^2 > 2\rho\sigma$; $\rho^2 + \sigma^2 - \delta^2 < -2\rho\sigma$ e però. $\delta < \rho - \sigma$; $\delta > \rho + \sigma$ cioè i due circoli (1) (2) non s'intersecano e la sostituzione (3) è iperbolica. In tal caso siano O_1, O_2 i centri dei due circoli: la congiungente i centri (O_1, O_2) incontri il 1° circolo in A_1, B_1: il 2° in A_2, B_2: queste due coppie di elementi non si separano e però vi è sulla congiungente i centri una coppia di elementi H_1, H_2 che separa armonicamente le due coppie; e però si avrà:

$$|O_1 H_1| \cdot |O_1 H_2| = |O_1 B_1|^2; \quad |O_2 H_1| \cdot |O_2 H_2| = |O_2 B_2|^2$$

e però H_1, H_2 si corrispondono in I_1, I_2 e però essi sono uniti per la (3); e così ogni circolo che passi per H_1. H_2 viene trasformato in se stesso da I_1, I_2; I_1, I_2.

3° Se $o < (a+d)^2 < 4$ si ha $(\rho^2 + \sigma^2 - \delta^2)^2 < 4\rho^2\sigma^2$ e però se Θ è un angolo; $\delta^2 = \rho^2 + \sigma^2 - 2\rho\sigma \cos\Theta$ e i due circoli s'incontrano in due elementi reali. In tal caso la sostituzione è ellittica. Siano H_1, H_2 gli elementi d'intersezione simmetrici rispetto alla congiungente i centri (O_1, O_2). H_1, H_2 sono evidentemente elementi uniti per la (3), essa come è facile verificare cambia in se stesso ogni circolo che abbia il centro sulla congiungente gli elementi uniti e li separi armonicamente. Poichè dall'essere

$$\frac{z' - \alpha}{z' - \beta} = e^{i\varphi} \frac{z - \alpha}{z - \beta}$$

si ricava: $\dfrac{|z' - \alpha|}{|z' - \beta|} = \dfrac{|z - \alpha|}{|z - \beta|}$ e se M è un elemento di uno di questi circoli si ha $|MH_1| : |MH_1| =$ cost. (Teorema di *Appollonio*). Sia γ uno di questi circoli O il suo centro A_1, A_2

gli elementi dove incontra la (H_1, H_2) avremo:

$$|OA_1|^2 = |OH_1| \cdot |OH_2|.$$

Ovvero: « Gli elementi uniti di una sostituzione ellittica sono corrispondenti nella riflessione che ha per circolo fondamentale uno dei circoli uniti della medesima »: Su ciascuno di questi circoli uniti A_1, A_2 si corrispondono fra loro nella sostituzione.

Per ottenere una sostituzione lossodromica bisogna che una delle due riflessioni sia impropria; difatti dall'espressione: $(a+d)^2 = \frac{(\sigma^2 + \rho^2 - \delta^2)^2}{\rho^2 \sigma^2}$ non può essere $(a+d)^2 < o$ a meno che non sia o $\rho^2 < o$, o $\sigma^2 < o$. Sia p. e. $\rho^2 < o$; allora il circolo (1) è immaginario e sulla congiungente i centri (O_1, O_2) esiste ed è reale la coppia H_1, H_2 che separa armonicamente le due coppie di elementi d'intersezione dei due circoli (1) (2) con (O_1, O_2). Ma H_1, H_2 si corrispondono in I_1, I_2 e però sono uniti per $I_1 \cdot I_2$.

Se poi le due inversioni fossero improprie allora è facile vedere che la sostituzione risultante è *iperbolica.*

Viceversa una sostituzione lineare può essere riguardata e in infiniti modi come la risultante di due inversioni (o più generalmente di un numero pari).

Sia la sostituzione

$$S; \quad z' = \frac{az+b}{cz+d}$$

e l'inversione

$$I; \quad z' = \alpha + \frac{\rho}{z_o - \alpha_o}$$

Consideriamo la $S' \equiv S \, . \, I$. La S' sarà della forma:

$$z' = \frac{(a\alpha + b)z_o + a(\rho - \alpha\alpha_o) - \alpha_o b}{(c\alpha + d)z_o + c(\rho - \alpha\alpha_o) - \alpha_o d}$$

perchè sia della forma

$$z' = \beta + \frac{\sigma^2}{z_o - \beta_o}$$

Si deve avere:

$$\beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}; \qquad \beta_o = \frac{d\alpha_o - c(\rho - \alpha\alpha_o)}{c\alpha + d}$$

e posto $\rho - \alpha\alpha_0 = \zeta$ si dovrebbe avere:

$$\frac{d\alpha_0 - c\zeta}{c\alpha + d} = \frac{a_0\alpha_0 + b_0}{c_0\alpha_0 + d_0};$$

$$\zeta = \left\{ \alpha_0 d - \frac{(a_0\alpha_0 + b_0)(c\alpha + d)}{c_0\alpha_0 + d_0} \right\} \frac{1}{c} \text{ (supposto } c = = o)$$

ζ deve essere reale; a, b, c, d sono date; posto $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ la condizione è

$$\zeta = \Psi_1(\alpha_1, \alpha_2) + i\,\Psi_2(\alpha_1, \alpha_2)$$

La condizione unica è dunque:

$$\Psi_2(\alpha_1, \alpha_2) = o$$

Una coppia di valori reali che soddisfi questa equazione risolve il problema.

15. Tutte le sostituzioni lineari che trasformano in se stessa una rete di circoli formano evidentemente un gruppo; esse trasformano in se stesso il circolo fondamentale della rete.

Abbiamo visto che l'equazione di una rete di circoli di (II_1) si può scrivere:

$$(1) \quad B(z - a) + B_0(z_0 - a_0) + A\big((z - a)(z_0 - a_0) + \rho\big) = o$$

e l'equazione del circolo fondamentale è:

$$(2) \quad (z - a)(z - a_0) = \rho$$

Possiamo per più semplicità supporre il centro a nell'origine delle coordinate e porre:

$$(1') \quad Bz + B_0 z_0 + A\,(zz_0 + \rho) = o$$

$$(2') \quad zz_0 = \rho$$

Sia una sostituzione lineare:

$$(3) \quad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

Facendo la sostituzione nella (1′) si ha

$$B(\alpha z + \beta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0) + B_0(\alpha_0 z_0 + \beta_0)(\gamma z + \delta) +$$
$$+ A\big((\alpha z + \beta)(\alpha_0 z_0 + \beta_0) + \rho(\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0)\big) = o$$

e sviluppando e ordinando si ha:

$$\begin{aligned} & B\alpha\delta_o + B_o\beta_o\gamma + A\,[\alpha\beta_o + \rho\gamma\delta_o]) \, z + \\ & + (B_o\alpha_o\delta + B\beta\gamma_o + A\,[\alpha_o\beta + \rho\gamma_o\delta]) \, z_o + \\ & + (B\alpha\gamma_o + B_o\alpha_o\gamma + A\,[\alpha\alpha_o + \rho\gamma\gamma_o]) \times \\ & \times \left\{ z z_o + \frac{B\beta\delta_o + B_o\beta_o\delta + A\,(\beta\beta_o + \delta\delta_o)}{B\alpha\gamma_o + B_o\alpha_o\gamma + A\,(\delta\delta_o + \rho\gamma\gamma_o)} \right\} = o \end{aligned}$$

Perchè questo circolo appartenga alla rete (1′) si deve avere, qualunque siano, A, B, B_o:

$$\frac{B\beta\delta_o + B_o\beta_o\delta + A\,(\beta\beta_o + \rho\delta\delta_o)}{B\alpha\gamma_o + B_o\delta_o\gamma + A\,(\alpha\alpha_o + \rho\gamma\gamma_o)} = \rho$$

Ovvero si debbono avere le uguaglianze:

$$(4) \quad \beta\delta_o - \rho\alpha\gamma_o = o \qquad\qquad (4') \quad \beta_o\delta - \rho\alpha_o\gamma = o$$

$$(4'') \quad \beta\beta_o + \rho\delta\delta_o = \rho\,[\alpha\alpha_o + \rho\gamma\gamma_o]$$

Alle quali aggiungiamo le relazioni:

$$(5) \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \qquad\qquad (5') \quad \alpha_o\delta_o - \beta_o\gamma_o = 1$$

le (4) (4′) dànno:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta_o}{\rho\gamma_o} = \lambda\,; \; \frac{\alpha_o}{\beta_o} = \frac{\delta}{\rho\gamma} = \lambda_o$$

Da queste si deduce:

$$\alpha = \lambda\beta\,,\; \alpha_o = \lambda_o\beta_o\,; \quad \delta = \rho\gamma\lambda_o\,,\; \delta_o = \rho\gamma_o\lambda$$

e sostituendo in (5) (5′) si ha:

$$\beta\gamma = \beta_o\gamma_o = \frac{1}{\lambda\lambda_o\rho - 1}\,; \qquad (6) \quad \lambda\lambda_o = \frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{1}{r_1 r_2}\right) > o$$

se si pone:

$$(7) \qquad \beta = r_1 e^{i\varphi}\,, \qquad\qquad (7') \quad \gamma = r_2 e^{-i\varphi}$$

essendo r_1, r_2 due numeri reali.

Dalla (6) poi si deduce che possiamo porre

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{1}{r_1 r_2}\right)} e^{i\Theta} ; \qquad \lambda_o = \sqrt{\frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{1}{r_1 r_2}\right)} e^{-i\Theta}$$

e però

(8) $$\alpha = r_1 \sqrt{\frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{1}{r_1 r_2}\right)} e^{i(\Theta + \varphi)} ;$$

(8′) $$\delta = r_2 \rho \sqrt{\frac{1}{\rho}\left(1 + \frac{1}{r_1 . r_2}\right)} e^{-i(\Theta + \varphi)}$$

Scriviamo che è verificata la (4″), si ha:

$$r_1^2 + \rho^2 r_2^2 \left(1 + \frac{1}{r_1 r_2}\right) = r_1^2 \left(1 + \frac{1}{r_1 r_2}\right) + \rho^2 r_2^2$$

Dalla quale relazione si ricava:

(9) $$r_1^2 = \rho^2 r_2^2 .$$

Supponiamo ora i seguenti casi:

(a) Sia il circolo fondamentale immaginario allora si avrà per la (2′)

$$\rho = - R^2$$

e la relazione precedente 9) si sdoppia in una delle due:

(10) $$r_1 = - R^2 r_2 ; \qquad r_1 = R^2 r_2$$

La 2ª è da scartare perchè il 2° membro della (6) diviene:

$$- \frac{1}{R^2}\left(1 + \frac{1}{R^2 r_2^2}\right) < o$$

e però in tal caso si avrà la (10) e però:

$$\beta = - R^2 \gamma_o ; \qquad \alpha = \delta_o$$

E le sostituzioni del gruppo che trasformano la rete

$$B z + B_o z_o + A (z z_o - R^2) = o$$

e il circolo fondamentale immaginario

$$z z_o + R^2 = o$$

in se stessi hanno la forma:

$$(11) \qquad z' = \frac{\alpha z - R^2\gamma_0}{\gamma z + \alpha_0} \qquad (\alpha\alpha_0 + R^2\gamma\gamma_0 = 1)$$

Siffatte sostituzioni sono ellittiche, difatti si ha $(\alpha + \delta)^2 =$ $= (\alpha + \alpha_0)^2 > o$ e inoltre:

$$(\alpha + \alpha_0)^2 - 4 = (\alpha - \alpha_0)^2 - 4R^2\gamma\gamma_0 < o$$

(b) Sia il circolo fondamentale reale si avrà per la (2′)

$$\rho = R^2$$

e la (9) si sdoppia nella due

$$r_1 = R^2 r_2 \qquad\qquad r_1 = -R^2 r_2$$

e si ha nei due casi:

$$\delta = \alpha_0\,, \quad \beta = R^2\gamma_0\,; \qquad\qquad \delta = -\alpha_0\,, \quad \beta = -R^2\gamma_0$$

e però

(12) $z' = \dfrac{\alpha z + R^2\gamma_0}{\gamma z + \alpha_0}$ nel 1° caso; (12′) $z' = \dfrac{\alpha z - R^2\gamma_0}{\gamma z - \alpha_0}$ nel 2° caso.

Ora la 2ª formula di sostituzione si riduce alla 1ª come è facile vedere dividendo numeratore e denominatore per i; difatti:

$$\frac{\alpha}{i} = \frac{\alpha_1 + i\alpha_2}{i} = \alpha_2 - i\alpha_1 = \alpha'\,;$$

$$\frac{-\alpha_0}{i} = \frac{-\alpha_1 + i\alpha_2}{i} = \alpha_2 + i\alpha_1 = \alpha'_0\,;$$

$$\frac{\gamma}{i} = \gamma_2 - i\gamma_1 = \gamma' \qquad \frac{-\gamma_0}{i} = \gamma_2 + i\gamma_1 = \gamma_0'$$

Quindi prenderemo la 1ª formula:

$$(12) \qquad z' = \frac{\alpha z + R^2\gamma_0}{\gamma z + \alpha_0}$$

ove: $\alpha\alpha_0 - R^2\gamma\gamma_0 = 1$. Nel nostro caso si ha: $(\alpha + \delta)^2 =$ $= (\alpha + \alpha_0)^2 > o$

$$(\alpha + \delta)^2 - 4 = (\alpha - \alpha_0)^2 + 4R^2\gamma\gamma_0$$

e però le sostituzioni sono ellittiche, paraboliche, iperboliche a seconda che

$$4\, R^2 \gamma\gamma_o \gtreqless -(\alpha - \alpha_o)^2$$

(*c*) Quindi se $\varrho = -o$ potremo porre nei due casi precedenti

$$(13) \qquad z' = \frac{\alpha z + \varrho\gamma_o}{\gamma z + \alpha_o}$$

Se $\varrho = o$ si ha:

$$(14) \qquad z' = \frac{\alpha z}{\gamma z + \alpha_o} \quad \alpha\alpha_o = 1$$

E queste sostituzioni lineari trasformano in se stessa la rete di tutti i circoli che passano per $z = o$. Esse sono ellittiche e gli elementi uniti sono $z_1 = o$ $z_2 = \frac{\alpha - \alpha_o}{\gamma}$. Se $z = e^{i\varphi}$ si ha $K = e^{i\varphi}$.

Oltre queste reti vi sono in Π_1 altre reti di circoli i cui circoli di raggio nullo formano una forma di 1ª specie (m). La rete è formata da tutti i circoli ortogonali ad m ed' individua una simmetria ortogonale rispetto a m. L'equazione di siffatta rete se si assume questa forma di 1ª specie come asse delle x è

$$(15) \qquad zz_o - a(z + z_o) = \varrho$$

ove a, ϱ sono parametri reali. Se $\varrho = -a^2$ si ha $zz_o - a(z + z_o) = -a^2$ e le soluzioni reali dell'equazione sono date da $z = a$, $z_o = a$ e però $z - z_o = o$. q. e. d. Trasformando la (15) mediante la sostituzione:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

si ottiene:

$$(\alpha\alpha_o - a\,(\alpha\gamma_o + \gamma\alpha_o) - \varrho\gamma\gamma_o)\, zz_o + (\alpha\beta_o - a\,(\alpha\delta_o + \gamma\beta_o) -$$
$$- \varrho\gamma\delta_o)\, z + (\alpha_o\beta - a\,(\alpha_o\delta + \gamma_o\beta) - \varrho\gamma_o\delta)\, z_o + \beta\beta_o -$$
$$- a\,(\beta\delta_o + \delta\beta_o) - \varrho\delta\delta_o = o$$

e si deve avere qualunque siano a, ϱ:

$$\alpha\beta_o - a(\alpha\delta_o + \gamma\beta_o) - \varrho\gamma\delta_o = \alpha_o\beta - a\,(\alpha_o\delta + \gamma_o\beta) - \varrho\gamma_o\delta$$

e però si hanno le uguaglianze:

(16) $\alpha\beta_o = \alpha_o\beta$; (16′) $\alpha\delta_o - \alpha_o\delta = \gamma_o\beta - \gamma\beta_o$ (16″) $\gamma\delta_o = \gamma_o\delta$

Dalle (16), (16″) si ha

$$\alpha_o = \lambda\alpha\,, \quad \beta_o = \lambda\beta\,; \qquad \gamma_o = \mu\gamma\,, \quad \delta_o = \mu\delta$$

e sostituendo in (16′):

$$\alpha\delta\,(\mu - \lambda) = \gamma\beta\,(\mu - \lambda)$$

e però $\mu = \lambda$; inoltre poichè $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ si ha $\alpha_o\delta_o - \beta_o\gamma_o = 1$ e però

$$\lambda^2\,(\alpha\delta - \beta\gamma) = 1$$

ovvero: $\lambda^2 = 1$; prendendo $\lambda = 1$ si ha che $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono numeri reali; il caso $\lambda = -1$ si riconduce al precedente moltiplicando tutti i termini per $+i$. Quindi il gruppo di sostituzioni che trasforma in se stesso l'asse delle x è a coefficienti reali; siffatto gruppo si dice Fuchsiano. Le sostituzioni del gruppo sono ellittiche, iperboliche, o paraboliche a seconda che $(\alpha + \delta)^2 \gtreqless 4$, perchè $(\alpha + \delta)^2 > o$.

Se le sostituzioni sono iperboliche o paraboliche gli elementi uniti si trovano sulla forma di 1ª specie unita m; se ellittiche gli elementi uniti sono simmetrici rispetto alla medesima. Poichè poi:

$$y' = \frac{y}{(\gamma x + \delta)^2 + \gamma^2 y^2}$$

le sostituzioni Fuchsiane mutano in se stessa ciascuna porzione in cui la forma di 2ª specie Euclidea (II_1) è divisa dalla m. Su queste sostituzioni ritorneremo più tardi.

16. Ritorniamo alla corrispondenza puntuale fra la forma di 2ª specie (II) ellittica e la (II_1) Euclidea. Abbiamo visto che in questa trasformazione data dalle formule:

$$(1)\ z = \frac{\zeta}{\sqrt{1 + \zeta\zeta_o} + 1}\,, \qquad (1')\quad \zeta = \frac{2z}{1 - zz_o}$$

al circolo fondamentale o *assoluto:*

$$\zeta\zeta_o + 1 = o \tag{2}$$

di (II) corrisponde il circolo:

$$zz_o + 1 = o \tag{2'}$$

di (II_1); alle forme di 1ª specie di (II) la rete

$$Bz + B_o z_o + A(1 - zz_o) = o \tag{3}$$

di circoli di (II_1) che ha per circolo fondamentale (2'); e a un elemento ζ di (II) due elementi di (II_1) corrispondenti nella riflessione rispetto a (2'). E che inoltre assumendo le $x = \text{cost}$, $y = \text{cost}$ come luoghi coordinati in (II) si ha un sistema coordinato Riemanniano il cui elemento lineare è:

$$\delta u^2 = \frac{dz \cdot dz_o}{(1 + zz_o)^2}$$

e in questo sistema di coordinate la (3) è l'equazione di una forma di 1ª specie, e la (2') l'equazione dell'assoluto di (II). Ora consideriamo le sostituzioni:

$$z' = \frac{\alpha z - \gamma_o}{\gamma z + \alpha_o} \; (\alpha\alpha_o + \gamma\gamma_o = 1) \tag{5}$$

che interpretate in (II_1) dànno un gruppo che trasforma in se stessa la rete (3). Queste, quindi. interpretate in (II) dànno delle trasformazioni puntuali binnivoche che fanno corrispondere ad una forma di 1ª specie una forma di 1ª specie; quindi esse costituiscono, un gruppo di *omografie*, le quali trasformano in se stesso l'assoluto e però, come è anche facile verificare direttamente, lasciano inalterato l'elemento lineare. Difatti si ha dalla (5)

$$dz' = \frac{dz}{(\gamma z + \alpha_o)^2}, \qquad dz'_o = \frac{dz_o}{(\gamma_o z_o + \alpha)^2};$$

$$1 + z' \cdot z'_o = \frac{zz_o + 1}{(\gamma_o z_o + \alpha)(\gamma z + \alpha_o)}$$

e però si ha identicamente

$$\frac{dz' dz'_o}{(1 + z' \cdot z'_o)^2} = \frac{dz \cdot dz_o}{(1 + z z_o)^2}$$

Di qui segue che le (5) formano un gruppo di movimenti; e siccome la (5) ha 3 parametri arbitrarii reali, le sostituzioni che si ottengono dànno ad α, γ tutti i valori complessi possibili, ma compatibili con la $\alpha\alpha_o + \gamma\gamma_o = 1$, rappresentano il gruppo generale dei movimenti nella metrica ellittica di (II). I due elementi uniti di (5) in (II_1) simmetrici rispetto a (2′) corrispondono in (II) a l'unico elemento unito o centro della rotazione. In questo sistema di coordinate z è l'affisso di un elemento di (II); però due numeri complessi z, z_1 legati dalla relazione

$$z_1 = \frac{-1}{z_o}$$

si debbono considerare come individuanti un medesimo elemento di (II). Siccome abbiamo visto, una sostituzione ellittica si può porre sotto la forma:

$$\frac{z' - \alpha}{z' - \alpha_1} = e^{i\varphi} \frac{z - \alpha}{z - \alpha_1} \tag{6}$$

ove α, α_1 sono gli elementi uniti della sostituzione in (II_1) ed essi, come si è visto, sono corrispondenti nella riflessione del circolo (2′) che è unito per la (6) e però appunto

$$\alpha_o \alpha_1 + 1 = o\,.$$

α, α_1 quindi in (II) sono gli affissi del medesimo centro di rotazione. Inoltre si vede facilmente il significato di φ; pel centro di rotazione (α) siano dz', dz due direzioni corrispondenti; si ha dalla (6) differenziando e facendo $z = z' = \alpha$.

$$\frac{dz'}{(z' - \alpha_1)^2} = e^{i\varphi} \frac{dz}{(z - \alpha_1)^2}\,; \quad dz' = e^{i\varphi} dz\,; \quad dz'_o = e^{-i\varphi} dz_o$$

L'angolo di due direzioni è dato da:

$$e^{2i\omega} = \frac{dz' dz_o}{dz \cdot dz'_o} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} = e^{2i\varphi}$$

e però, a meno di multipli di 2π, si ha

$$\varphi = \omega$$

φ è dunque l'ampiezza della rotazione.

17. Consideriamo ora un sottogruppo G di movimenti contenuto nel gruppo generale di tutti i movimenti della forma ellittica II. Essi sono costituiti tutti da rotazioni. Se α è un elemento di (II) tutte le rotazioni che hanno per centro α sono della forma

$$(1) \qquad \frac{z' - \alpha}{z' - \alpha_1} = e^{i\varphi} \cdot \frac{z - \alpha}{z - \alpha_1} \qquad (\alpha_0 \alpha_1 + 1 = o)$$

e formano un gruppo G_1. Ad ogni valore di φ corrisponde una sostituzione di G_1 e viceversa. Per questi gruppi di rotazioni possiamo ripetere le considerazioni fatte al n° 4 e concludere che un sottogruppo G_1 di rotazioni concentriche discontinuo o contiene delle trasformazioni infinitesime ed è impropriamente discontinuo in tutta la forma di 2^a specie (II) o se è propriamente discontinuo è formato dalle potenze di una stessa rotazione ciclica

$$(1') \qquad \frac{z' - \alpha}{z' - \alpha_1} = e^{\frac{2i\pi}{n}} \cdot \frac{z - \alpha}{z - \alpha_1}$$

e contiene n rotazioni.

Ora sia G un gruppo di rotazioni e siano $O_{\nu_1}, O_{\nu_2}, \ldots O_{\nu_n} \ldots$ i centri di rotazione, ove con $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n \ldots$ esprimiamo i cicli corrispondenti ai diversi centri. Siano questi in numero infinito, quindi essendo la forma (II) chiusa, pel teorema di Weierstrass, gli elementi uniti o centri $O_{\nu_1}, O_{\nu_2}, \ldots O_{\nu_n} \ldots$ dovranno ammettere in essa, *almeno un elemento limite*. Sia L; siccome in un intorno di L per quanto piccolo, cadono infiniti centri, vi dovranno essere *almeno due di essi*, che corrispondono al medesimo ciclo ν, se supponiamo che tutti i cicli debbano essere numeri finiti. Fissato ε piccolo ad arbitrio, vi saranno dunque

le due rotazioni:

$$S_1;\ \frac{z^{(o)}-\alpha}{z^{(o)}-\alpha_1}=e^{\frac{2i\pi}{\nu}}\frac{z-\alpha}{z-\alpha_1}.$$

$$S_2;\ \frac{z'-\beta}{z'-\beta_1}=e^{\frac{2i\pi}{\nu}}\frac{z-\beta}{z-\beta_1};\ |\alpha-\beta|<\varepsilon$$

E però possiamo porre:

$$\beta=\alpha+\eta\delta t;\qquad \beta_1=\alpha_1+\eta_1\delta t$$

ove δt è una quantità infinitesima. Si ha:

$$\frac{z'-\beta}{z'-\beta_1}=\frac{z'-\alpha-\eta\delta t}{z'-\alpha_1-\eta_1\delta t}=\frac{z'-\alpha}{z'-\alpha_1}\left(1-\frac{\eta\delta t}{z'-\alpha}\right)\left(1+\frac{\eta_1\delta t}{z'-\alpha_1}\right)=$$
$$=\frac{z'-\alpha}{z'-\alpha_1}+\delta t\frac{H'}{(z'-\alpha_1)^2};\quad \frac{z-\beta}{z-\beta_1}=\frac{z-\alpha}{z-\alpha_1}+\delta t\frac{H}{(z-\alpha_1)^2}$$

e però possiamo scrivere:

$$S_2;\ \frac{z'-\alpha}{z'-\alpha_1}+\frac{H'}{(z'-\alpha_1)^2}\delta t=e^{\frac{2i\pi}{\nu}}\frac{z-\alpha}{z-\alpha_1}+e^{\frac{2i\pi}{\nu}}\frac{H}{(z-\alpha_1)^2}\delta t$$

e di qui si ricava:

$$S_1^{-1}\ S_2;\ \frac{z'-\alpha}{z'-\alpha_1}=\frac{z^{(o)}-\alpha}{z^{(o)}-\alpha_1}+\Omega\,\delta t.$$

che è una trasformazione infinitesima e però il gruppo sarà impropriamente discontinuo in tutta la forma. Di qui segue che, perchè un gruppo di movimenti sia propriamente discontinuo in tutta la forma di 2ª specie ellittica, deve essere formato da un numero *finito* di movimenti. La reciproca è evidente.

Siano ora $O_{\nu_1}, O_{\nu_2}, \ldots O_{\nu_r}$ i centri di rotazione; nella rappresentazione di (Π) su (Π_1) questi avranno per corrispondenti i $2\nu_r$ poli o elementi uniti di G; $o_{\nu_1}, o_{\nu_2}, \ldots o_{\nu_r};\ o'_{\nu_1}, o'_{\nu_2}, \ldots o'_{\nu_r}$ ove o_{ν_i}, o'_{ν_i} sono simmetrici rispetto al circolo fondamentale. Intorno ad o_{ν_i} si hanno ν_i sostituzioni e così intorno a o'_{ν_i}, e vice-

versa ogni sostituzione di G, ha in (Π_1) *due poli* o_{ν_i}, o'_{ν_i}; e però se tutte le sostituzioni di G esclusa l'identità sono $\nu - 1$, i poli sono $2(\nu - 1)$, se ogni polo conta $\nu_i - 1$ volte e però potremo scrivere

$$\sum_1^{2r}(\nu_i - 1) = 2(\nu - 1)$$

Ora le uniche sostituzioni di G che lasciano fisso o_{ν_i} sono le ν_i che lo hanno come polo; e così possiamo dire per o'_{ν_i}: poniamo per semplicità $o'_{\nu_i} = o_{\nu_{r+i}}$ e però i poli in (Π_1) sono; $o_{\nu_1}, o_{\nu_2} \ldots o_{\nu_{2r}}$. Essi si distribuiscono in classi, nel modo seguente: o_{ν_i} verrà portato da tutte le sostituzioni del gruppo nei posti $o_{\nu_{i_1}}, o_{\nu_{i_2}}, \ldots o_{\nu_{i_{t-1}}}$, essendo questi, poli di G; difatti se $S_{\nu_i}^k$ è una sostituzione di polo o_{ν_i} e S una sostituzione del gruppo che porta o_{ν_i} in $o_{\nu_{i_t}}$, la $S_{\nu_i}^{-k} S . S_{\nu_i}^k$, lascia $o_{\nu_{i_t}}$ fisso e appartiene al gruppo; di più si vede che $\nu_{i_1} = \nu_{i_2} = . \nu_{i_{t-1}} = \nu_i$. Quindi i poli si distinguono in classi; e tutti i poli di una classe sono trasformabili fra loro per tutte le sostituzioni del gruppo, e ognuno di essi rimane invariato per ν_i sostituzioni; avremo quindi $t . \nu_i = \nu$ e $t = \frac{\nu}{\nu_i}$ e se s sono le classi e $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_s$ gli ordini delle singole classi, avremo: $\sum_1^s \frac{\nu}{\nu_i} = 2r$ e $\sum_1^{2r}(\nu_i - 1) =$ $= \sum_1^s \frac{\nu}{\nu_i}(\nu_i - 1)$ e potremo porre

$$\sum_1^s \frac{\nu}{\nu_i}(\nu_i - 1) = 2(\nu - 1) \tag{2}$$

Questa equazione indeterminata dovuta al Klein ci dice che i gruppi di sostituzioni propriamente discontinui corrispondenti ai movimenti della metrica ellittica si riducono a un numero finito di tipi determinati; ai quali gruppi il Klein impose il nome di *gruppi poliedrali.*

Noi qui ci limiteremo a darne la classificazione, rimandando per l'effettiva investigazione, all'opera classica del Klein: *Vorlesungen über das Ikosaeder* (Leipzig-Teubner, 1884) e alle *Lezioni sulla teoria delle sostituzioni* di L. Bianchi (Pisa, Spörri, 1900).

Tipo 1° *della piramide regolare* $(r = 1\,,\ \nu_1 = \nu_2 = m)$

$$\frac{z' - \alpha}{z' - \alpha_1} = e^{\frac{2k\pi i}{m}} \frac{z - \alpha}{z - \alpha_1} \qquad (k = o\,,1\,,\ldots\ m - 1\,;\ \alpha\alpha_1 + 1 = o)$$

Questo gruppo nella forma ellittica (π) rappresenta tutte le rotazioni di centro (α) potenze dell'unica rotazione minima di ciclo m.

Tipo 2° *della bi-piramide regolare* $(r = 3\,,\ \nu_1 = 2\ \nu_2 = \nu_3 = m)$. Essa ha le sostituzioni del tipo

$$\frac{z' - \alpha}{z' - \alpha_1} = e^{\frac{2k\pi i}{n}} \frac{z - \alpha}{z - a_1}\,;\ \frac{z' - a}{z' - a_1} = -\frac{z - a}{z - a_1} \text{ ove } \alpha = \frac{e^{i\varphi}\cdot\alpha - 1}{\alpha_o + e^{i\varphi}}$$

che sulla forma ellittica ci rappresentano; un gruppo di rotazioni concentriche intorno ad (α) di ampiezza minima $\frac{2\pi}{m}$, e un gruppo di rotazioni intorno ad (a) di ampiezza minima π.

Tipo 3° *del tetraedro* $(r = 1\,2\,,\ \nu_1 = 2\,,\ \nu_2 = 3\,,\ \nu_3 = 3)$. Si hanno le 12 sostituzioni:

$$z' = \varepsilon z\,,\ \frac{\varepsilon}{z}\,,\ \varepsilon i\,\frac{z+1}{z-1}\,,\ \varepsilon i\,\frac{z-1}{z+1}\,,\ \varepsilon\,\frac{z+i}{z-i}\,,\ \varepsilon\,\frac{z-i}{z+i}\ (\varepsilon = \mp 1)$$

Tipo 4° *dell'ottaedro* $(r = 24\,,\ \nu_1 = 2\,,\ \nu_2 = 3\,,\ \nu_3 = 4)$ Si hanno le 24 sostituzioni:

$$z' = i^{\varepsilon} z\,,\quad \frac{i^{\varepsilon}}{z}\,,\ i^{\varepsilon}\frac{z \pm 1}{z \mp 1}\,,\ i^{\varepsilon}\frac{z \pm i}{z \mp i}\quad (\varepsilon = o\,,1\,,2\,,3)$$

Tipo 5° *dell'icosaedro* $(r = 60\,,\ \nu_1 = 2\,,\ \nu_2 = 3\,,\ \nu_3 = 5)$ si hanno 60 sostituzioni:

$$z' = \varepsilon^r z\,.\ -\frac{\varepsilon^r}{z}\,,\ \varepsilon^r\frac{(\varepsilon^4 - \varepsilon)\,\varepsilon^s z + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)}{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\,\varepsilon^s z - (\varepsilon^4 - \varepsilon)}\,,$$

$$\varepsilon^r\,\frac{(\varepsilon^4 - \varepsilon)\,\varepsilon^s z - (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)}{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\,\varepsilon^s z + (\varepsilon^4 - \varepsilon)}$$

ove: $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}\ (r\,,s = 0\,,1\,,2\,,3\,,4)$.

A questi gruppi di sostituzioni corrispondono dei gruppi di movimenti finiti nella forma (II). Osserviamo inoltre che ogni gruppo di movimenti ammette delle *rotazioni fondamentali.* Così il gruppo del tipo 1° ammette la rotazione fondamentale $\frac{z' - \alpha}{z' - \alpha_1} = e^{\frac{2i\pi}{m}} \frac{z - \alpha}{z - \alpha_1}$; quello del 2° tipo ammette le rotazioni fondamentali (fatto $\alpha = o$ e però $a = -e^{-i\varphi}$)

$$z' = e^{\frac{2\pi i}{m}} \cdot z, \qquad z' = -\frac{e^{-i\varphi}}{z}.$$

In coordinate ξ, η questi movimenti hanno per equazioni:

$$\xi' = \cos\frac{2\pi}{m} \cdot \xi - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{m} \cdot \eta, \qquad \eta' = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{m} \cdot \xi + \cos\frac{2\pi}{m} \cdot \eta;$$

$$\xi' = -\cos\varphi \,.\, \xi + \operatorname{sen}\varphi \,.\, \eta, \qquad \eta' = \operatorname{sen}\varphi \,.\, \xi + \cos\varphi \,.\, \eta$$

Il 1° movimento è una rotazione di ampiezza $\frac{2\pi}{m}$ intorno all'elemento $\xi = o$, $\eta = o$; per vedere che rappresentino le 2° formule facciamo delle (5) del n° 10 che dànno le formule generali di un movimento, $\mu = o$ $\omega = \pi$ esse divengono: $\xi = -\cos 2\alpha \,.\, \xi_o + \operatorname{sen} 2\alpha \,.\, \eta_o$, $\eta = \operatorname{sen} 2\alpha \,.\, \xi_o + \cos 2\alpha \,.\, \eta_o$ che coincidono con le precedenti se si faccia $2\alpha = \varphi$, esse dunque rappresentano una rotazione di ampiezza π intorno all'elemento

$$x : y : z = \cos\frac{\varphi}{2} : -\operatorname{sen}\frac{\varphi}{z} : o$$

e però il centro di questa rotazione è sulla polare z del centro della 1ª; essa ammette una forma di 1ª specie di elementi uniti di equazione

$$-\cos\frac{\varphi}{2}\,\xi + \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\,\eta = o.$$

Il 3° gruppo ha per movimenti fondamentali:

$$z' = -z, \quad z' = \frac{1}{z}, \quad z' = i\,\frac{z+1}{z-1}, \quad z' = i\,\frac{z-1}{z+1},$$

$$z' = -i\,\frac{z+1}{z-1}, \qquad z' = -i\,\frac{z-1}{z+1}$$

In coordinate ξ, η essi sono

$$1^\circ\ \xi' = -\xi, \quad \eta' = -\eta; \qquad 2^\circ\ \xi' = \xi, \quad \eta' = -\eta;$$

$$3^\circ\ \xi' = -\frac{\eta}{\xi}, \quad \eta' = \frac{1}{\xi}; \qquad 4^\circ\ \xi' = \frac{\eta}{\xi}, \quad \eta' = \frac{1}{\xi};$$

$$5^\circ\ \xi' = -\frac{\eta}{\xi} \quad \eta' = -\frac{1}{\xi}, \qquad 6^\circ\ \xi' = \frac{\eta}{\xi}, \quad \eta' = -\frac{1}{\xi}$$

Il movimento 1° è una rotazione di ampiezza π intorno al centro $(\xi = o, \eta = o)$, il 2° una rotazione di ampiezza π intorno al centro $(o, -1, o)$, i movimenti 3°, 4°, 5°, 6° sono rispettivamente rotazioni intorno ai centri: $[\xi = -1, \eta = -1]$, $[\xi = 1, \eta = 1]$, $[\xi = 1, \eta = -1]$, $[\xi = -1, \eta = +1]$ e di ampiezza $\dfrac{2\pi}{3}$.

Il 4° gruppo ha oltre le rotazioni del gruppo precedente anche l'altra: $z' = iz$ che in coordante ξ, η diviene: $\xi' = -\eta$, $\eta' = \xi$ ed è perciò una rotazione di ampiezza $\dfrac{\pi}{2}$ intorno all'elemento $(\xi = o, \eta = o)$.

Il 5° gruppo ha 3 rotazioni fondamentali

$$z' = e^{\frac{2\pi i}{5}} \cdot z, \quad z' = -\frac{1}{z}, \quad z' = \frac{(\varepsilon^4 - \varepsilon) z + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)}{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3) z - (\varepsilon^4 - \varepsilon)} \quad (\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}})$$

La 1ª è una rotazione intorno all'elemento $(\xi = o, \eta = o)$ di ampiezza $\dfrac{2\pi}{5}$, la 2ª una rotazione intorno all'elemento $(1, o, o)$ di ampiezza π, l'ultima è una rotazione di ampiezza π intorno all'elemento $\left[z = \dfrac{\varepsilon^4 - \varepsilon + \sqrt{-5}}{\varepsilon^2 - \varepsilon^3} \right]$.

Per la discontinuità di questi gruppi finiti di movimenti risulta che la forma di 2ª specie viene per ciascuno di essi divisa in una rete poligonale e tutti i poligoni della rete sono congruenti; per ogni movimento del gruppo la rete si sovrappone a se stessa. Per ulteriori schiarimenti su queste reti si consulti l'opera citata del Klein.

17. Consideriamo nella forma Euclidea (II_1) una rete di circoli. Siano rispettivamente

$$(1) \quad A(z-a) + A_0(z_0 - a_0) + (z-a)(z_0-a_0) + \rho = o;$$

$$(1') \quad (z-a)(z_0-a_0) = \rho; \qquad (1'') \quad z' - a = \frac{\rho}{z_0 - a_0}$$

Un circolo della rete, il circolo fondamentale, la riflessione determinata dalla rete. Osserviamo che se (α), R sono rispettivamente il centro e il raggio di un circolo della rete possiamo porre

$$(z-\alpha)(z_0-\alpha_0) - R = (z - a + a - \alpha)(z_0 - a_0 + a_0 - \alpha_0) - R = o$$

e sviluppando

$$(z-a)(z_0-a_0) + (a_0-\alpha_0)(z-a) +$$
$$+ (a-\alpha)(z_0-a_0) + (a-\alpha)(a_0-\alpha_0) - R = o$$

che confrontata con la (1) dà:

$$A = a_0 - \alpha_0, \qquad A_0 = a - \alpha \qquad (a-\alpha)(a_0-\alpha_0) - R = \rho$$

La condizione dunque perchè un circolo (R, α) appartenga alla rete che ha per circolo fondamentale il circolo (ρ, a) è

$$(2) \qquad (a-\alpha)(a_0-\alpha_0) = R + \rho$$

e questa condizione è *reciproca*. Osserviamo inoltre che se $\rho = -r_0^2$ cioè il circolo fondamentale della rete (1) è immaginario si ha

$$R = (a-\alpha)(a_0-\alpha_0) + r_0^2$$

cioè $R > o$ e tutti i circoli della rete sono reali, inoltre $R \geq r_0^2$ e però nessun circolo della rete ha raggio nullo; se $R = r_0^2$ si ha $a = \alpha$. Se diciamo *ellittica*, *parabolica*, *iperbolica* una rete di circoli a seconda che il circolo fondamentale è immaginario, nullo, reale possiamo dire: « *Se una rete è ellittica* tutti i suoi circoli sono reali e ammettono un circolo di raggio minimo e diverso da zero il cui centro cade nel centro della rete ».

Due reti che soddisfano alla (2), tali cioè che il circolo fondamentale dell'una appartiene all'altra si dicono *coniugate*. Risulta dalle formule precedenti:

1° « Che se di due reti coniugate una è *ellittica*, l'altra è *iperbolica* »;

« che se di due reti coniugate l'una è *parabolica*, l'altra è o *iperbolica* o *parabolica* ».

E perciò « due reti coniugate non possono essere ambedue *ellittiche* ».

Consideriamo due circoli della rete (1): essi avranno le equazioni:

$$(3) \qquad (z-\alpha)(z_0-\alpha_0)=(a-\alpha)(a_0-\alpha_0)-\rho;$$

$$(3') \qquad (z-\beta)(z_0-\beta_0)=(a-\beta)(a_0-\beta_0)-\rho$$

L'equazione del loro asse radicale si ottiene sottraendo (3) e (3') ed è:

$$(\beta-\alpha)(z_0-a_0)+(\beta_0-\alpha_0)(z-a)=o$$

esso passa pel centro della rete, come è noto; siano (μ), (ν) i due elementi che i circoli hanno in comune ove $\mu=\mu_1+i\mu_2$, $\nu=\nu_1+i\nu_2$ si avrà:

$$(4)\ \frac{\mu-a}{\beta-\alpha}=-\frac{\mu_0-a_0}{\beta_0-\alpha_0}=h;\ (4')\ \frac{\nu-a}{\beta-\alpha}=-\frac{\nu_0-a_0}{\beta_0-\alpha_0}=-k$$

Se, $\mu_1, \mu_2; \nu_1, \nu_2$ sono reali si ha:

$$\frac{\mu_0-a_0}{\beta_0-\alpha_0}=h_0, \quad \frac{\nu_0-a_0}{\beta_0-\alpha_0}=k_0$$

e però

$$h+h_0=o, \qquad k+k_0=o$$

cioè h e k sono immaginarii puri: l'inverso è evidente; d'altronde h, k sono radici dell'equazione

$$-x^2(\beta-\alpha)(\beta_0-\alpha_0)=(a-\alpha)(a_0-\alpha_0)-\rho$$

come si deduce dalle (4) o (4') e dalla (3) e però

$$h=\sqrt{\frac{\rho-(a-\alpha)(a_0-\alpha_0)}{(\beta-\alpha)(\beta_0-\alpha_0)}}\ k=-\sqrt{\frac{\rho-(a-\alpha)(a_0-\alpha_0)}{(\beta-\alpha)(\beta_0-\alpha_0)}}$$

Se la rete è ellittica $\rho = -r_o^2$ e si ha

$$h = -k = i\sqrt{\frac{r_o^2 + (a-\alpha)(a_o-\alpha_o)}{(\beta-\alpha)(\beta_o-\alpha_o)}}$$

Quindi se una rete è ellittica, due circoli della rete s'incontrano sempre in due elementi *reali.* Si può venire alla nozione di reti coniugate anche per quest'altra via:

Sia data la rete:

$$(5) \quad A(z-a) + A_o(z_o-a_o) + (z-a)(z_o-a_o) + \rho = o$$

vediamo in che relazione deve essere la riflessione

$$(6) \qquad z' - b = \frac{\sigma}{z_o - b_o}$$

con la rete perchè trasformi un circolo della rete in un altro circolo della medesima. Poniamo per semplicità: $z - a = \zeta$, $z_o - a_o = \zeta_o$ le (5) (6) divengono

$$(5') \qquad A\zeta + A_o\zeta_o + \zeta\zeta_o + \rho = o;$$

$$(6') \qquad \zeta' + c = \frac{\sigma}{\zeta_o + c_o} \qquad (c = a - b\,, \quad c_o = a_o - b_o)$$

Sostituendo nella (5') la (6') si ha

$$A(c\zeta_o + \sigma - cc_o)(\zeta - c) + A_o(c_o\zeta + \sigma - cc_o)(\zeta_o - c_o) +$$
$$+ (c\zeta_o + \sigma - cc_o)(c_o\zeta + \sigma - cc_o) + \rho(\zeta - c)(\zeta_o - c_o) = o$$

e posto $\sigma - cc_o = \tau$:

$$A(c\zeta_o + \tau)(\zeta - c) + A_o(c_o\zeta + \tau)(\zeta_o - c_o) +$$
$$+ (c\zeta_o + \tau)(c_o\zeta + \tau) + \rho(\zeta - c)(\zeta_o - c_o) = o$$

e la condizione richiesta è:

$$\rho \cdot (Ac + A_oc_o + cc_o + \rho) = -A\tau c - A_o\tau c_o + \tau^2 + \rho cc_o;$$
$$Ac(\rho + \tau) + A_oc_o(\rho + \tau) + \rho^2 - \tau^2 = o$$

Condizione che deve essere soddisfatta qualunque siano A, A_o e però si avrà:

$$\rho + \tau = o; \qquad (2') \quad \rho + \sigma = (a-b)(a_o-b_o)$$

che è la condizione (2). Si ha quindi il teorema:

« Se due reti sono coniugate l'una è trasformata in se stessa dalla riflessione determinata dall'altra ».

Due reti in (Π_1) hanno a comune un fascio; ciò si verifica così. Siano

$$(z-\alpha)(z_0-\alpha_0)=(a-\alpha)(a_0-\alpha_0)-\rho;$$
$$(z-\alpha)(z_0-\alpha_0)=(b-\alpha)(b_0-\alpha_0)-\sigma$$

due circoli, appartenente il 1° alla rete (a, ρ), il 2° alla rete (b, σ) concentrici; perchè coincidano si deve avere:

$$(a-\alpha)(a_0-\alpha_0)-\rho=(b-\alpha)(b_0-\alpha_0)-\sigma;$$
$$(a-b)\alpha_0+(a_0-b_0)\alpha=aa_0-bb_0+\sigma-\rho \tag{7}$$

e la (7) è l'equazione di una forma di 1ª specie; ciò che dimostra il teorema: Se delle due reti una è ellittica, i circoli del fascio hanno gli elementi base (due) reali. Se sono coniugate le due reti (R), (R'), e (F) è il fascio in comune, di elementi base A_1, A_2 avremo, se (R) è ellittico (R') iperbolico:

1° A_1, A_2 sono reali.

2° La riflessione individuata da (R') trasforma un circolo di (R) in un circolo di (R).

3° Due elementi corrispondenti della riflessione sono situati su uno stesso circolo del fascio (F) e perciò i circoli del fascio (F) sono gli unici circoli di R uniti per la riflessione individuata da R'.

4° Il circolo fondamentale di (R') è unito nella trasformazione e due circoli corrispondenti di (R) si segano su (R'); gli elementi d'intersezione sono corrispondenti nella riflessione individuata da (R).

5° A_1, A_2 sono corrispondenti nella riflessione individuata da (R).

18. Ciò premesso, torniamo alla corrispondenza fra la forma ellittica (II) e la parabolica (Π_1) e supponiamo che il circolo fondamentale della rete ellittica (R) sia il corrispondente dell'assoluto di (II) allora alla rete (R) di (Π_1) corrisponde in (II) la rete di tutte le forme di 1ª specie. Che corrisponde alla riflessione individuata su (Π_1) dalla rete (R')? Intanto al circolo fon-

damentale di (R′) corrisponde in (Π) una forma di 1ª specie b; al fascio di circoli (A_1, A_2) un fascio di forme di 1ª specie per B corrispondente degli elementi A_1, A_2; si ha dunque su (Π) una corrispondenza biunivoca tale che due elementi corrispondenti sono allineati con un elemento fisso B; ad una forma di 1ª specie corrisponde una forma di 1ª specie e due forme di 1ª specie s'incontrano sulla forma fissa b; si ha dunque una omologia; ma essa è involutoria perchè tale è la riflessione (R′) su (Π_1); quindi alle riflessioni (R′) coniugate di (R) in (Π_1) corrisponde in (Π) una speciale classe di omologie involutorie; in tal caso la (2′) poichè $\rho = -1$ $a = a_0 = o$ diviene:

$$-1 + \sigma = bb_0$$

e siffatte omologie hanno per equazione:

$$z' - b = \frac{bb_0 + 1}{z_0 - b_0} \tag{3}$$

Ma inoltre osserviamo che siffatte omologie trasformano l'assoluto in se stesso perchè in (Π_1) il circolo fondamentale di (R) appartiene ad (R′) e perciò se I J sono gli elementi in cui una forma di 1ª specie per il centro B incontra l'assoluto, e C dove incontra b; I, J sono corrispondenti nell'omologia involutoria; di qui segue che se M, M′ sono un altra coppia di elementi corrispondenti sulla stessa forma di 1ª specie le due quaterne:

$$(B, C, M, M') ; \qquad (B, C, I, J)$$

sono armoniche e però B e C sono centri dei segmenti $\overline{MM'}$, $\overline{M'M}$; quindi la (3) rappresenta una simmetria di asse b, di centro B. Che poi ogni simmetria su (π) sia rappresentata da una (3) è evidente perchè ogni forma di 1ª specie in (π) è rappresentata dall'equazione:

$$(z - b)(z_0 - b_0) = bb_0 + 1 ; \qquad -bz_0 - b_0 z + zz_0 - 1 = o$$

e come si è visto una forma di 1ª specie individua una simmetria la quale sarà appunto rappresentata dalla (3).

Però riguardo alla metrica ellittica giova fare una osservazione. Nella metrica Euclidea e vedremo nella Iperbolica le

simmetrie sono di due specie; rispetto ad un centro; rispetto ad un asse; le 1[e] sono rotazioni di ampiezza π, le 2[e] sono essenzialmente distinte dalle 1[e] e dai movimenti propriamente detti e fanno parte dei così detti *movimenti di 2[a] specie;* nella metrica ellittica invece non si ha distinzione fra queste due specie di simmetrie, perchè come si vede le simmetrie rispetto a un centro sono anche simmetrie rispetto ad un asse polare del centro rispetto all'assoluto e però non si hanno più le due specie summentovate di movimenti. Le simmetrie sono dunque suscettibili delle due espressioni

$$(4) \quad \frac{z' - a}{z' - a_1} = - \frac{z - a}{z - a_1}\,; \qquad (4') \quad z' - b = \frac{bb_o + 1}{z_o - b_o}$$

è facile vedere come si passa da una forma all'altra. Si è visto che un elemento nella metrica ellittica viene individuato da due affissi z, ζ purchè fra essi vi passi la relazione:

$$z\zeta_o + 1 = o$$

e inoltre nella 1[a] formula: $a_o a_1 + 1 = o$; quindi la 1[a] formula esprime la stessa corrispondenza se si pone al posto di z, $-\frac{1}{\zeta_o}$ o che fa l'istesso $-\frac{1}{z_o}$ ed essa diviene

$$\frac{z' - a}{a_o z' + 1} = \frac{1 + az_o}{z_o - a_o}\,; \qquad (5) \quad z' = \frac{2az_o + 1 - aa_o}{(1 - aa_o)\, z_o - 2a_o}$$

la (5) confrontata con la (4') dà:

$$b = \frac{2a}{1 - aa_o}, \qquad b_o = \frac{2a_o}{1 - aa_o}$$

e queste relazioni legano gli affissi a, b; il 1° dei quali individua l'asse di simmetria, il 2° il centro. L'equazione di una simmetria si può porre *o* sotto la forma (5) *o* sotto la forma

$$(5') \qquad z' = \frac{-(1 - aa_o)\, z + 2a}{2a_o z + 1 - aa_o}$$

che si ottiene dalla (5) ponendo in essa $-\frac{1}{z_0}$ invece di z. Per far sì che il determinante della sostituzione sia 1, dividiamo i coefficienti per $i(1+a\,a_0)$ e poniamo:

$$\frac{1-aa_0}{i(1+aa_0)}=-im\,,\quad \frac{2a}{i(1+aa_0)}=n\quad \frac{2a_0}{i(1+aa_0)}=-n_0$$

ove m è reale le (5) (5′) divengono:

$$z'=\frac{nz_0-im}{-imz_0+n_0}\,;\qquad z'=\frac{imz+n}{-n_0z-im}$$

In generale un movimento nella metrica ellittica è suscettibile delle due forme:

$$z'=\frac{az+b}{-b_0z+a_0}\,,\qquad z'=\frac{bz_0-a}{a_0z_0+b_0}\quad (da-bc=1)$$

Se b è immaginario puro, il movimento è una simmetria.

19. Veniamo ora al caso della metrica iperbolica. Qui si ha

$$g(u)=\frac{sh^2u}{2}\,;\qquad \frac{d^2lg\,[g(u)]}{du^2}=-\frac{2}{sh^2u}\ \text{e però}\ m=-1$$

La (6) n° 7° dà

$$\varphi(v)=A\cos(v+\alpha)$$

E infine le (10) (10′) n° 7° dànno:

$$\Theta=r-A\,\mathrm{sen}\,(v+\alpha)\,cthu\,,\quad \Omega=A\cos(v+\alpha)$$

e perciò le trasformazioni infinitesime divengono:

$$\delta u=A\cos(v+\alpha)\cdot\delta t\,,\qquad \delta v=(r-A\,\mathrm{sen}\,(v+\alpha)\,cthu)\cdot\delta t$$

e posto al solito v invece di $v+\alpha$ si hanno le equazioni:

$$(1)\qquad \frac{du}{dt}=A\cos v\,,\qquad \frac{dv}{dt}=r-A\,\mathrm{sen}\,v\ cthu$$

Poniamo:

$$\xi=thu\cdot\mathrm{sen}\,v\qquad \eta=thu\cdot\cos v$$

Sostituendo nelle (1) avremo

$$(2) \qquad \frac{d\xi}{dt} = r \cdot \eta - A\,\xi \cdot \eta \qquad \frac{d\zeta}{dt} = -r\xi + A\,(1 - \eta^2)$$

Poniamo al solito:

$$\xi = \frac{x}{z}, \qquad \eta = \frac{y}{z} \quad \text{e avremo:}$$

$$\frac{dx}{dt} z - \frac{dz}{dt} x = ryz - A\,xy;$$

$$\frac{dy}{dt} z - \frac{dz}{dt} y = -rxz + A(z^2 - y^2)$$

Posto: $\frac{dz}{dt} = Ay$ si hanno le 3 equazioni lineari:

$$(3) \qquad \frac{dx}{dt} = ry, \qquad \frac{dy}{dt} = -rx + Az, \qquad \frac{dz}{dt} = Ay$$

Da queste si deduce:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (A^2 - r^2)\,y.$$

e integrando:

$$y = M e^{\sqrt{A^2 - r^2} \cdot t} + N e^{-\sqrt{A^2 - r^2} \cdot t}$$

Sostituendo questo valore di y nella 1ª e nella 3ª delle (3) e integrando si ha:

$$x = \frac{rM}{\sqrt{A^2 - r^2}} e^{\sqrt{A^2 - r^2} \cdot t} - \frac{rN}{\sqrt{A^2 - r^2}} e^{-\sqrt{A^2 - r^2} \cdot t} + C$$

$$z = \frac{AM}{\sqrt{A^2 - r^2}} e^{\sqrt{A^2 - r^2} \cdot t} - \frac{AN}{\sqrt{A^2 - r^2}} e^{-\sqrt{A^2 - r^2} \cdot t} + D$$

Sostituendo questi valori di x, y, z nella 2ª della (3) si ha:

$$AD - rC = o, \qquad D = \frac{rC}{A}$$

e però abbiamo le formule:

$$(4)\ x = \frac{rM}{\sqrt{A^2 - r^2}} e^{\sqrt{A^2-r^2}\cdot t} - \frac{rN}{\sqrt{A^2-r^2}} e^{-\sqrt{A^2-r^2}\cdot t} + C,$$

$$y = M e^{\sqrt{A^2-r^2}\cdot t} + N e^{-\sqrt{A^2-r^2}\cdot t},$$

$$z = \frac{AM}{\sqrt{A^2-r^2}} e^{\sqrt{A^2-r^2}\cdot t} - \frac{AN}{\sqrt{A^2-r^2}} e^{-\sqrt{A^2-r^2}\cdot t} + \frac{rC}{A}$$

Se x_o, y_o, z_o sono i valori di x, y, z che corrispondono a $t = o$ si ha:

$$x_o = \frac{r}{\sqrt{A^2-r^2}}(M - N) + C, \qquad y_o = M + N,$$

$$z_o = \frac{A}{\sqrt{A^2-r^2}}(M - N) + \frac{rC}{A}$$

equazioni che risolute rispetto ad M, N, C dànno:

$$M = \frac{1}{2\sqrt{A^2-r^2}}(Az_o - rx_o + \sqrt{A^2-r^2}\, y_o),$$

$$N = \frac{1}{2\sqrt{A^2-r^2}}(\sqrt{A^2-r^2}\, y_o - Az_o + rx_o),$$

$$C = \frac{A}{A^2-r^2}(Ax_o - rz_o)$$

Sostituendo questi valori nelle (4) si ottiene:

$$(5)\ x = \frac{r}{2(A^2-r^2)}(-rx_o + \sqrt{A^2-r^2}\, y_o + Az_o) e^{\sqrt{A^2-r^2}\cdot t} -$$

$$- \frac{r}{2(A^2-r^2)}(rx_o + \sqrt{A^2-r^2}\, y_o - Az_o) e^{-\sqrt{A^2-r^2}\cdot t} + \frac{A(Ax_o - rz_o)}{A^2-r^2}$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{A^2-r^2}}(-rx_o + \sqrt{A^2-r^2}\, y_o + Az_o) e^{\sqrt{A^2-r^2}\cdot t} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{A^2-r^2}}(rx_o + \sqrt{A^2-r^2}\, y_o - Az_o) e^{-\sqrt{A^2-r^2}\cdot t}$$

$$z = \frac{A}{2(A^2 - r^2)}(-rx_o + \sqrt{A^2 - r^2}y_o + Az_o)\, e^{\sqrt{A^2 - r^2}\cdot t} -$$

$$- \frac{A}{2(A^2 - r^2)}(rx_o + \sqrt{A^2 - r^2}y_o - Az_o)\, e^{-\sqrt{A^2 - r^2}\cdot t} + \frac{r(Ax_o - rz_o)}{A^2 - r^2}$$

Dalle equazioni (5) si deduce facilmente:

$$(6) \quad -rx + \sqrt{A^2 - r^2}y + Az = e^{-\sqrt{A^2 - r^2}\cdot t}(-rx_o + \sqrt{A^2 - r^2}y_o + Az_o),$$

$$rx + \sqrt{A^2 - r^2}y - Az = e^{-\sqrt{A^2 - r^2}\cdot t}(rx_o + \sqrt{A^2 - r^2}y_o - Az_o),$$

$$Ax - rz = Ax_o - rz_o$$

Queste equazioni ci dicono che le tre forme di 1ª specie:

$$(7) \qquad -rx + \sqrt{A^2 - r^2}y + Az = o,$$

$$(7') \quad rx + \sqrt{A^2 - r^2}y - Az = o, \qquad (7'') \quad Ax - rz = o$$

Sono unite ed è unito ciascun circolo del fascio:

$$(-rx + \sqrt{A^2 - r^2}y + Az)(rx + \sqrt{A^2 - r^2}y - Az) = k(Ax - rz)^2$$

circoli che hanno la forma:

$$(8) \quad (r^2 + kA^2)x^2 - (A^2 - r^2)y^2 + (A^2 + kr^2)z^2 - 2rA(1 + k)xz = o$$

per $k = -1$ si ha:

$$x^2 + y^2 - z^2 = o$$

che è l'equazione dell'assoluto; dunque le (5) trasformano in se stesso l'assoluto. Le (7) (7′) sono tangenti all'assoluto e gli elementi di contatto sono:

$$(9) \qquad a_1 : a_2 : a_3 = r : -\sqrt{A^2 - r^2} : A;$$

$$(9') \qquad b_1 : b_2 : b_3 = r : \sqrt{A^2 - r^2} : A$$

La (7″) passa per gli elementi di contatto e però è polare dell'elemento d'incontro delle (7) (7′):

$$(9'') \qquad c_1 : c_2 : c_3 = A : o : r$$

Sostituendo le $(9'')$ nel trinomio $x^2+y^2-z^2$ esso diviene A^2-r^2 e come si sa se:

$A^2-r^2<o$ l'elemento è interno alla quadratica $x^2+y^2-z^2=o$

$A^2-r^2=o$ l'elemento è sulla quadratica $x^2+y^2-z^2=o$

$A^2-r^2>o$ l'elemento è esterno alla quadratica $x^2+y^2-z^2=o$.

20. Consideriamo ora partitamente questi tre casi:

1° caso $A^2-r^2<o$. I circoli (8) hanno per centro comune l'elemento $(9'')$; diremo questi circoli traiettorie. Nel 1° caso il centro delle traiettorie è interno all'assoluto; esso dunque appartiene alla regione propria e le traiettorie sono circoli di 1ª specie. Le (5) in tal caso al variare di t rappresentano delle *rotazioni* che hanno per centro l'elemento (9). Se poniamo: $A^2-r^2=-\omega^2$ le (5) divengono:

$$x=-\frac{r}{2\omega^2}(-rx_o+i\omega y_o+Az_o)e^{i\omega t}+$$

$$+\frac{r}{2\omega^2}(rx_o+i\omega y_o-Az_o)e^{-i\omega t}-\frac{A}{\omega^2}(Ax_o-rz_o).$$

$$y=-\frac{i\omega}{2\omega^2}(-rx_o+i\omega y_o+Az_o)e^{-i\omega t}-$$

$$-\frac{i\omega}{\omega^2}(rx_o+i\omega y_o-Az_o)e^{i\omega t}$$

$$z=-\frac{A}{2\omega^2}(-rx_o+i\omega y_o+Az_o)e^{i\omega t}+$$

$$+\frac{A}{2\omega^2}(rx_o+i\omega y_o-Az_o)e^{-i\omega t}-\frac{r(Ax_o-rz_o)}{\omega^2}.$$

Ovvero ordinando rispetto x_o, y_o, z_o e togliendo gli immaginarii:

$$x=\frac{1}{\omega^2}(r^2\cos\omega t-A^2)x_o+\frac{r}{\omega}\operatorname{sen}\omega t\cdot y_o+\frac{rA}{\omega^2}(1-\cos\omega t)z_o$$

$$y=-\frac{r}{\omega}\operatorname{sen}\omega t\cdot x_o+\cos\omega t\cdot y_o+\frac{A}{\omega}\operatorname{sen}\omega t\cdot z_o$$

$$z=\frac{Ar}{\omega^2}(\cos\omega t-1)x_o+\frac{A}{\omega}\operatorname{sen}\omega t\cdot y_o+\frac{1}{\omega^2}(r^2-A^2\cos\omega t)z_o$$

Ovvero sostituendo a $x:y:z$ dei multipli opportuni, si ha

$$x:y:z = (r^2 \cos\omega t - A^2)\,x_o + r\omega \operatorname{sen}\omega t \cdot y_o + rA\,(1-\cos\omega t)\,z_o :$$
$$- r\omega \operatorname{sen}\omega t \cdot x_o + \omega^2 \cos\omega t \cdot y_o + A\omega \operatorname{sen}\omega t \cdot z_o :$$
$$- Ar\,(1-\cos\omega t)\,x_o + A\omega \operatorname{sen}\omega t \cdot y_o + (r^2 - A^2 \cos\omega t) z_o$$

Posto: $\dfrac{r^2}{A^2} = \mu^2 > 1$ e posto ω invece di ωt si ha:

$$x:y:z = (\mu^2 \cos\omega - 1)x_o + \mu\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{sen}\omega\cdot y_o + \mu(1-\cos\omega)z_o :$$
$$-\mu\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{sen}\omega\cdot x_o + (\mu^2-1)\cos\omega\cdot y_o + \sqrt{\mu^2-1}\operatorname{sen}\omega\cdot z_o :$$
$$-\mu\,(1-\cos\omega)\,x_o + \sqrt{\mu^2-1}\operatorname{sen}\omega\cdot y_o + (\mu^2-\cos\omega)\,z_o$$

Per venire alle formule più generali ricordiamo che si è posto

$$\xi' = thu \operatorname{sen}(v+\alpha), \qquad \eta' = thu \cos(v+\alpha);$$
$$\xi' = \xi\cos\alpha + \eta\operatorname{sen}\alpha, \qquad \eta' = \eta\cos\alpha - \xi\operatorname{sen}\alpha$$

e introducendo le coordinate omogenee.

(**) $x' = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha, \quad y' = -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \quad z' = z$

e applicando le inverse a x_o, y_o, z_o

(*) $x_o = x'_o\cos\alpha - y'_o\operatorname{sen}\alpha, \quad y_o = x'_o\operatorname{sen}\alpha + y'_o\cos\alpha, \quad z_o = z'_o$

Avremo dunque a meno di un fattore:

$$x' = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha = \Big((\mu^2\cos\omega - 1)\cos\alpha -$$
$$-\mu\sqrt{\mu^2-1}\cdot\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\alpha\Big)x_o + \Big(\mu\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{sen}\omega\cos\alpha +$$
$$+(\mu^2-1)\cos\omega\operatorname{sen}\alpha\Big)y_o - \Big(\mu\,(1+\cos\omega)\cos\alpha + \sqrt{\mu^2-1}\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\alpha\Big)z_o$$

e sostituendo a x_o, y_o, z_o i valori dati delle (*) e togliendo gli apici si ottiene:

$$(10)\quad x = \Big(\cos\omega(\mu^2 - \operatorname{sen}^2\alpha) - \cos^2\alpha\Big)x_o + \Big(\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha(1-\cos\omega) +$$
$$+\mu\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{sen}\omega\Big)y_o + \Big(\mu\,(1-\cos\omega)\cos\alpha +$$
$$+\sqrt{\mu^2-1}\cdot\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\alpha\Big)z_o.$$

$$y = \Big(\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,(1-\cos\omega) - \mu\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{sen}\omega\Big)x_o +$$
$$+\Big(\cos\omega\,(\mu^2 - \cos^2\alpha) - \operatorname{sen}^2\alpha\Big)y_o + \Big(-\mu\operatorname{sen}\alpha\,(1-\cos\omega) -$$
$$\sqrt{\mu^2-1}\operatorname{sen}\omega\cos\alpha\Big)z_o.$$

$$z = \Big(-\mu\,(1-\cos\omega)\cos\alpha + \sqrt{\mu^2-1}\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\alpha\Big)x_o +$$
$$\Big(\mu\,(1-\cos\omega)\operatorname{sen}\alpha + \sqrt{\mu^2-1}\operatorname{sen}\omega\cos\alpha\Big)y_o +$$
$$\Big(\mu^2 - \cos\omega\Big)z_o.$$

Siccome poi dalle (**) si deduce

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 = x^2 + y^2 - z^2$$

è chiaro che le (10) che sono le formule più generali di una rotazione trasformano l'assoluto in se stesso. Dalle (10) poi facilmente si deduce:

$$x \operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha = \cos\omega\,(\mu^2 - 1)\,(x_o \operatorname{sen}\alpha + y_o\cos\alpha) +$$
$$+ \operatorname{sen}\omega \sqrt{\mu^2 - 1}\,(\mu\,(-x_o\cos\alpha + y_o \operatorname{sen}\alpha) + z_o).$$
$$\mu\,(-x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha) + z = (\mu^2 - 1)\cos\omega\,(\mu\,(-x_o\cos\alpha +$$
$$+ y_o\operatorname{sen}\alpha) + z_o) - \operatorname{sen}\omega\,(1 - \mu^2)^{\frac{3}{2}}\,(x_o\operatorname{sen}\alpha + y_o\cos\alpha)\,\cdot$$
$$-\cos\alpha\, x + \operatorname{sen}\alpha\, y + \mu z = (\mu^2 - 1)\,(-\cos\alpha\, x_o +$$
$$+ \operatorname{sen}\alpha\, y_o + \mu z_o)$$

e ponendo:

$$X = (\mu^2 - 1)\,(x \operatorname{sen}\alpha + y.\cos\alpha)$$
$$Y = (\mu^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\,(\mu\,(-x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha) + z)$$
$$Z = -\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\, y + \mu z\,\cdot$$

si ha:

$$\frac{X}{\mu^2 - 1} = X_o\cos\omega + Y_o\operatorname{sen}\omega\,;\quad \frac{Y}{\mu^2 - 1} = Y_o\cos\omega - X_o\operatorname{sen}\omega\,,$$
$$\frac{Z}{\mu^2 - 1} = Z_o$$

da queste si deduce subito

$$\frac{X + iY}{\mu^2 - 1} = e^{-i\omega}\,(X_o + iY_o)\,;\qquad \frac{X - iY}{\mu^2 - 1} = e^{i\omega}\,(X_o - i\,.\,Y_o)$$
$$\frac{Z}{\mu^2 - 1} = Z_o$$

Di qui si deduce che sono unite le forme:

$$X + iY = o \qquad X - iY = o \qquad Z = o$$

E il centro di rotazione intersezione delle due forme $X = o$ $Y = o$ ha per coordinate

$$C_1 : C_2 : C_3 = \cos\alpha : -\operatorname{sen}\alpha : \mu$$

e poichè: $x^2 + y^2 - z^2 = 1 - \mu^2 < o$ l'elemento centro è nella regione propria: questi movimenti sono delle rotazioni della stessa specie di quelle già studiate nelle metriche parabolica ed ellittica e ω è appunto l'ampiezza della rotazione; qui però la forma 1ª specie unita $Z = o$ è tutta nella regione ideale; l'equazione delle traiettorie è:

$$X^2 + Y^2 - kZ^2 = o$$

21. Consideriamo il caso $A^2 - r^2 > o$. In tal caso il centro delle traiettorie è esterno all'assoluto e le traiettorie sono circoli di 2ª specie (vedi fine del n° 29). Ponendo $A^2 - r^2 = \omega^2$ le (5) n.° 19 divengono:

$$x = \frac{r}{2\omega^2}(-rx_o + \omega y_o + Az_o)e^{\omega t} - \frac{r}{2\omega^2}(rx_o + \omega y_o - Az_o)e^{-\omega t}$$
$$+ \frac{A}{\omega^2}(Ax_o - rz_o)$$

$$y = \frac{1}{2\omega^2}(-rx_o + \omega y_o + Az_o)e^{\omega t} + \frac{1}{2\omega}(rx_o + \omega y_o - Az_o)e^{-\omega t}$$

$$z = \frac{A}{2\omega^2}(-rx_o + \omega y_o + Az_o)e^{\omega t} - \frac{A}{2\omega^2}(rx_o + \omega y_o - Az_o)e^{-\omega t}$$
$$+ \frac{r(Ax_o - rz_o)}{\omega^2}$$

e da queste deduciamo ordinando rispetto a x_o, y_o, z_o:

$$x = \frac{x_o}{\omega^2}(A^2 - r^2 ch\omega t) + \frac{y_o r}{\omega} sh\omega t + \frac{Ar}{\omega^2}(ch\omega t - 1) . z_o .$$

$$y = -x_o r \frac{sh\omega t}{\omega} + ch\omega t . y_o + \frac{A}{\omega} sh\omega t . z_o$$

$$z = -\frac{Ar}{\omega^2}(ch\omega t - 1)x_o + \frac{Ay_o}{\omega} sh\omega t + \frac{z_o}{\omega^2}(A^2 ch\omega t - r^2)$$

ovvero sostituendo ad x, y, z dei multipli opportuni possiamo scrivere.

$$x = (A^2 - r^2\, ch\omega t)\, x_0 + r\omega sh\omega t \,.\, x_0 + Ar\, (ch\omega t - 1) z_0 ;$$
$$y = - \omega r sh\omega t \,.\, x_0 + ch\omega t \,.\, \omega^2 y_0 + A\omega \,.\, sh\omega t \,.\, z_0 ;$$
$$z = - Ar\, (ch\omega t - 1)\, x_0 + \omega A sh\omega t \,.\, y_0 + (A^2\, ch\omega t - r^2)\, z_0$$

Facciamo $t = 1$, $\mu^2 = \frac{r^2}{A^2} < 1$ avremo:

$$x = (1 - \mu^2\, ch\omega)\, x_0 + \mu \sqrt{1-\mu^2} \,.\, sh\omega \,.\, y_0 + \mu\, (ch\omega - 1) \,.\, z_0 ;$$
$$y = - \mu \sqrt{1-\mu^2}\, sh\omega \,.\, x_0 + ch\omega\, (1 - \mu^2) \,.\, y_0 + \sqrt{1-\mu^2}\, sh\omega \,.\, z_0 ;$$
$$z = - \mu\, (ch\omega - 1)\, x_0 + \sqrt{1-\mu^2}\, sh\omega \,.\, y_0 + (ch\omega - \mu^2)\, z_0$$

E facendo al solito le sostituzioni

$$x' = x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha ; \qquad y' = - x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha ; \qquad z' = z ;$$
$$x_0 = x'_0 \cos\alpha - y'_0 \operatorname{sen}\alpha , \qquad y_0 = x'_0 \operatorname{sen}\alpha + y'_0 \cos\alpha , \qquad z_0 = z'_0$$

Si ottiene togliendo gli apici:

$$(10') \quad x = \left(\cos^2\alpha + (\operatorname{sen}^2\alpha - \mu^2)\, ch\omega\right) x_0 + \left(\mu \sqrt{1-\mu^2}\, sh\omega + \operatorname{sen}\alpha \,.\, \cos\alpha\, (ch\omega - 1)\right) y_0 + \left(\mu\, (ch\omega - 1) \cos\alpha + \sqrt{1-\mu^2}\, sh\omega \operatorname{sen}\alpha\right) z_0$$

$$y = \left((ch\omega - 1) \operatorname{sen}\alpha \,.\, \cos\alpha - \mu \sqrt{1-\mu^2}\, sh\omega\right) x_0 + \left(\operatorname{sen}^2\alpha + ch\omega\, (\cos^2\alpha - \mu^2)\right) y_0 + \left(- \operatorname{sen}\alpha\, (ch\omega - 1)\, \mu + \sqrt{1-\mu^2}\, sh\omega \cos\alpha\right) z_0$$

$$z = \left(- \mu\, (ch\omega - 1) \cos\alpha + \sqrt{1-\mu^2}\, sh\omega \operatorname{sen}\alpha\right) x_0 + \left(- \mu\, (ch\omega - 1) \operatorname{sen}\alpha + \sqrt{1-\mu^2}\, sh\omega \cos\alpha\right) y_0 + (ch\omega - \mu^2)\, z_0$$

Per le (10′) asseriamo come per le (10) che trasformano in se stesso l'assoluto.

$$x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha = (1 - \mu^2)\, ch\omega\, (x_0 \operatorname{sen}\alpha + y_0 \cos\alpha) + \sqrt{1-\mu^2}\, sh\omega\, \left(\mu\, (- \cos\alpha\, x_0 + \operatorname{sen}\alpha\, y_0) + z_0\right)$$

$$\mu\, (- x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha) + z = (1 - \mu^2)\, ch\omega\, (\mu\, (- x_0 \cos\alpha + y_0 \operatorname{sen}\alpha) + z_0) + (1 - \mu^2)^{\frac{2}{3}}\, (x_0 \operatorname{sen}\alpha + y_0 \cos\alpha)\, sh\omega$$

$$x \,.\, \cos\alpha - y \,.\, \operatorname{sen}\alpha - \mu z = (1 - \mu^2)\, (x_0 \cos\alpha - y_0 \operatorname{sen}\alpha - \mu z_0)$$

Posto:

$$X = (1 - \mu^2)(x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha), \tag{11}$$
$$Y = \sqrt{1-\mu^2}\,(\mu(-\cos\alpha\, x_o + y_o \operatorname{sen}\alpha) + z),$$
$$Z = x\cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha - \mu z$$

Si ha:

$$\frac{X}{1-\mu^2} = X_o\, ch\omega + Y_o\, sh\omega \qquad \frac{Y}{1-\mu^2} = Y_o\, ch\omega + X_o\, sh\omega \tag{12}$$
$$\frac{Z}{1-\mu^2} = Z_o$$

Qui le forme unite del movimento sono tutte e tre reali

$$X + Y = o \qquad X - Y = o \qquad Z = o$$

Gli elementi uniti sono tre. Ora di questi l'elemento d'incontro di $X = o$, $Y = o$ appartiene alla regione impropria perchè le sue coordinate sono: (*) $\cos\alpha$, $-\operatorname{sen}\alpha$, μ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1 - \mu^2 > o$.

Le forme $X + Y = o$, $X - Y = o$ sono tangenti all'assoluto rispettivamente negli elementi:

(**) $\operatorname{sen}\alpha\sqrt{1-\mu^2} - \mu\cos\alpha : \cos\alpha\sqrt{1-\mu^2} + \mu \operatorname{sen}\alpha : 1$;
$\operatorname{sen}\alpha\sqrt{1-\mu^2} + \mu\cos\alpha : \cos\alpha\sqrt{1-\mu^2} - \mu\operatorname{sen}\alpha : -1$

e $L = o$ è la corda di contatto; perchè dalle (11) si deduce facilmente:

$$X^2 - Y^2 + (1-\mu^2) Z^2 = x^2 + y^2 - z^2 \tag{13}$$

Ciò che dimostra appunto che le $X + Y = o$, $X - Y = o$ sono tangenti all'assoluto e $Z = o$ è la corda di contatto e però polare dell'elemento unito (*), perciò essa è interna all'assoluto cioè entra nella regione reale e incontra nei due elementi reali (**) l'assoluto, elementi che sono uniti. Le traiettorie sono la $Z = o$ e i circoli di 2ª specie che la hanno come centrale. ω rappresenta la *traslazione* di un elemento di $z = o$ cioè la distanza di un elemento di $z = o$ dal suo corrispondente. Difatti la distanza di un elemento X_o, Y_o, Z_o del corrispondente X, Y, Z è data da:

$$\rho = \frac{\sqrt{(XX_o - YY_o + (1-\mu^2) Z\cdot Z_o)^2 - (X^2 - Y^2 + (1-\mu^2)Z^2)(X_o^2 - Y_o^2 + (1-\mu^2) Z_o^2)}}{XX_o - YY_o + (1-\mu^2) Z\cdot Z_o}$$

e per le (13)

$$XX_o - YY_o + (1 - \mu^2) Z \cdot Z_o = ch\omega (X_o^2 - Y_o^2) + (1 - \mu^2) Z_o^2$$

$$X^2 - Y^2 + (1 - \mu^2) Z^2 = X_o^2 - Y_o^2 + (1 - \mu^2) Z_o^2$$

Sostituendo in thφ avremo:

$$th\varphi = \frac{\sqrt{(X_o^2 - Y_o^2)(ch\omega - 1)\left((X_o^2 - Y_o^2)(ch\omega + 1) + 2(1-\mu^2)Z_o^2\right)}}{ch\omega (X_o^2 - Y_o^2) + (1 - \mu^2) Z_o^2}$$

Le equazioni delle traiettorie sono:

$$X^2 - Y^2 = \lambda Z^2$$

e poichè X_o, Y_o, Z_o si trova su una traiettoria (λ) avremo: $X_o^2 - Y_o^2 = \lambda Z_o^2$, e sostituendo in th$\varphi$ si ha:

$$(14) \qquad th\varphi = \frac{\sqrt{\lambda^2 sh^2\omega + 2(1 - \mu^2)\lambda (ch\omega - 1)}}{\lambda\, ch\omega + 1 - \mu^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{sh^2\omega + 2(1 - \mu^2)\Theta (ch\omega - 1)}}{ch\omega + \Theta (1 - \mu^2)}$$

avendo posto $\Theta = \frac{1}{\lambda}$. Se $\Theta = o$ la traiettoria è l'*asse di traslazione* $Z = o$ e si ha

$$th\varphi = th\omega; \qquad \omega = \varphi$$

In generale posto nella (14) per ω, $d\omega$; avremo

$$sh\omega = d\omega, \qquad th\varphi = d\varphi, \qquad ch\omega - 1 = \frac{d\omega^2}{2}$$

e la (14) diviene

$$(15)\ d\varphi = \frac{d\omega}{\sqrt{1 + \Theta (1 - \mu^2)}} \qquad (15')\ \varphi = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \Theta (1 - \mu^2)}}$$

e la (15') è la lunghezza dell'arco O che intercede sulla traiettoria Θ fra due elementi corrispondenti. Questo movimento si dice *rotazione di 2ª specie o impropria;* la forma di 1ª specie $Z = o$, asse direttore, ω ampiezza. Come si vede tutti gli elementi della medesima traiettoria descrivono il medesimo arco.

Variando Θ da o a $-\dfrac{1}{1-\mu^2}$ si hanno le traiettorie della regione propria; su ogni traiettoria φ ha un certo valore che varia da ω ad ∞.

22. Sia ora $A^2 - r^2 = o$. Per trattare questo caso risaliamo alle equazioni differenziali:

$$(3) \qquad \frac{dx}{dt} = ry, \qquad \frac{dy}{dt} = -rx + Az, \qquad \frac{dz}{dt} = Ay$$

La $A^2 = r^2$ dà: $A = r$, $A = -r$ e nei due casi le equazioni precedenti divengono:

$$(3') \qquad \frac{dx}{dt} = ry, \qquad \frac{dy}{dt} = r(z - x), \qquad \frac{dz}{dt} = ry;$$

$$(3'') \qquad \frac{dx}{dt} = ry, \qquad \frac{dy}{dt} = -r(x + z), \qquad \frac{dz}{dt} = -ry$$

(a) Sia $A = r$; dalla 1ª e 3ª delle (3′) si ha:

$$\frac{d(z-x)}{dt} = o \qquad (*) \quad z - x = m$$

e dalla 2ª:

$$(16) \qquad y = rmt + n$$

e però sostituendo nella 1ª e 3ª delle (3′) integrando e tenendo presente la (*)

$$(16') \; x = \frac{r^2t^2}{2} m + rtn + p \quad (16'') \; z = \frac{r^2t^2}{2} m + rtn + p + m$$

Per $t = o$ si avrà:

$$p = x_o, \; p + m = z_o, \; n = y_o; \quad p = x_o, \; m = z_o - x_o, \; n = y_o$$

Sostituendo questi valori nelle (16), (16′), (16″) e fatto $rt = \tau$ si ha:

$$(17) \; x = \left(1 - \frac{\tau^2}{2}\right) x_o + \tau y_o + \frac{\tau^2}{2} \cdot z_o; \; y = -\tau x_o + y_o + \tau z_o;$$

$$z = -\frac{\tau^2}{2} x_o + \tau y_o + \left(1 + \frac{\tau^2}{2}\right) z_o.$$

(*b*) Sia $A = -r$, dalle $(3'')$ si deduce:

$$x + z = m; \qquad y = -rmt + n;$$

$$x = -\frac{mr^2t^2}{2} + nrt + p, \quad z = +\frac{mr^2t^2}{2} - nrt - p + m$$

e fatto al solito $rt = \tau$ e $\tau = o$ e posto

$$x_o = p, \; y_o = n, \; z_o = m - p; \quad p = y_o, \; n = y_o, \; m = z_o + x_o$$

avremo:

$$(18) \qquad x = x_o\left(1 - \frac{\tau^2}{2}\right) + y_o \cdot \tau - \frac{\tau^2}{2} z_o;$$

$$y = -\tau x_o + y_o - \tau z_o; \qquad z = \frac{\tau^2}{2} x_o - \tau y_o + \left(1 + \frac{\tau^2}{2}\right) z_o$$

Esaminiamo questi movimenti. Dalle (17) si deduce:

$$x - z = x_o - z_o; \; x + z = -\tau^2 (x_o - z_o) + 2\tau y_o + (x_o + z_o);$$

$$x^2 - z^2 = -\tau^2 (x_o - z_o)^2 + 2\tau y_o (x_o - z_o) + x_o^2 - z_o^2$$

e però:

$$x^2 + y^2 - z^2 = x_o^2 + y_o^2 - z_o^2$$

Quindi queste trasformazioni trasformano l'assoluto in se stesso. Le traiettorie sono il fascio di oricicli:

$$x^2 + y^2 - z^2 = k(x - z)^2$$

che passano per l'elemento di contatto della $x - z = o$ con l'assoluto; uno degli elementi d'incontro della $y = o$ con l'assoluto. Del resto cercando gli elementi uniti della (17) si trova per l'appunto l'unico elemento $x_o = z_o$; $y_o = o$.
Ragionando analogamente sulle (18) si trova che anche esse rappresentano dei movimenti dell'istessa specie delle (17) le cui traiettorie è il fascio di oricicli.

$$x^2 + y^2 - z^2 = k(x + z)^2$$

che passano per l'elemento di contatto delle $x + z = o$ con l'assoluto; quell'elemento di contatto $x_o = -z_o$ $y_o = o$ è l'unico

elemento unito delle trasformazioni. Siffatte trasformazioni si dicono *traslazioni* e l'elemento di contatto del fascio di traiettorie–oricicli, *centro*. Per trovare la forma più generale di queste traslazioni si può partire dalle (17) o dalle (18) e porre al solito:

$$x_o = x'_o \cos\alpha - y'_o \operatorname{sen}\alpha\,, \qquad y_o = x'_o \operatorname{sen}\alpha + y'_o \cos\alpha \qquad z_o = z'_o$$
$$x' = x\cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha\,, \quad y' = -x \operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \quad z' = z_o$$

e così si ottiene

$$(19)\quad x = \left(1 - \frac{\tau^2}{2}\cos^2\alpha\right)x_o + \tau\left(1 + \frac{\tau}{2}\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\right)y_o + $$
$$+ \tau\left(\frac{\tau}{2}\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\right)z_o$$

$$y = \tau\left(\frac{\tau\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2} - 1\right)x_o + \left(1 - \frac{\tau^2}{2}\operatorname{sen}^2\alpha\right)y_o +$$
$$+ \tau\left(\cos\alpha - \frac{\tau}{2}\operatorname{sen}\alpha\right)z_o$$

$$z = \tau\left(\operatorname{sen}\alpha - \frac{\tau}{2}\cos\alpha\right)x_o + \tau\left(\frac{\tau}{2}\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha\right)y_o +$$
$$+ \left(1 + \frac{\tau^2}{2}\right)z_o$$

Le (19) sono le formule generali cercate: esse per $\alpha = o$ dànno le (17) per $\alpha = \pi$ le (18).
Le traiettorie di questi movimenti (ove s'immagini α fissa) si ottengono osservando che per essi al solito

$$(***)\qquad X^2 + Y^2 - Z^2 = X_o^2 + Y_o^2 - Z_o^2$$

e inoltre dalle (19) si ricava facilmente:

$$x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha - z = x_o\cos\alpha - y_o\operatorname{sen}\alpha - z_o$$

e però il fascio di traiettorie è il fascio di *oricicli:*

$$(21)\quad x^2 + y^2 - z^2 - \vartheta\,(x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha - z)^2 = o$$

Il cui elemento di contatto con l'assoluto o *centro* ha per coordinate:

$$C_1 : C_2 : C_3 = \cos\alpha : -\operatorname{sen}\alpha : 1$$

Troviamo anche qui la distanza di due elementi corrispondenti (x, y, z) (x_o, y_o, z_o) si ha la (***) e inoltre:

$$xx_o + yy_o - zz_o = x_o^2 + y_o^2 - z_o^2 - \frac{\tau^2}{2}(\cos\alpha . x_o - \operatorname{sen}\alpha . y_o - z_o)^2$$

Se δ è la distanza:

$$th\delta = \frac{\sqrt{(xx_o + yy_o - zz_o)^2 - (x^2 + y^2 - z^2)(x_o^2 + y_o^2 - z_o^2)}}{xx_o + yy_o - zz_o} =$$

$$\frac{\sqrt{\left(x_o^2 + y_o^2 - z_o^2 - \frac{\tau^2}{2}(\cos\alpha x_o - \operatorname{sen}\alpha y_o - z_o)^2\right)^2 - (x_o^2 + y_o^2 - z_o^2)^2}}{x_o^2 + y_o^2 - z_o^2 - \frac{\tau^2}{2}(\cos\alpha x_o - \operatorname{sen}\alpha y_o - z_o)^2}$$

e poichè per i due elementi passa un oriciclo (20) sostituendo si ha (a parte il segno)

$$th\delta = \frac{\tau\sqrt{\frac{\tau^2}{4} - \vartheta}}{\frac{\tau^2}{2} - \vartheta}$$

e per τ infinitesimo:

$$d\delta = \frac{d\tau}{\sqrt{-\vartheta}}$$

Infine la lunghezza di un arco di oriciclo compreso fra due elementi corrispondenti è:

$$\delta = \frac{\tau}{\sqrt{-\vartheta}}$$

e si dice *ampiezza* della traslazione su ogni oriciclo traiettoria.

Riassumendo nella metrica iperbolica si hanno 3 specie di movimenti (semplici)

(a) *Rotazioni proprie* intorno ad un elemento della regione reale con traiettorie circoli di 1ª specie.

(*b*) *Rotazioni improprie* intorno ad un elemento della regione ideale, con traiettorie circoli di 2ª specie.

(*c*) *Traslazioni* lungo un fascio di oricicli, che possono considerarsi come rotazioni il cui centro è l'elemento di contatto, sull'assoluto, del fascio di oricicli-traiettorie.

23. Veniamo a considerare le *simmetrie* nella metrica iperbolica, cioè le omologie armoniche che hanno per centro e asse polo e polare rispetto all'assoluto; il loro numero, come è evidente, è ∞^2 e ripetendo un ragionamento del tutto analogo a quello tenuto nella metrica ellittica (nº 12) si trova:

Se $a : b : c$ sono le coordinate lineari di un elemento della forma di 2ª specie l'equazione della polare rispetto all'assoluto, $x^2 + y^2 - z^2 = o$ è:

$$ax + by - cz = o$$

e le equazioni della simmetria sono:

$$x' = \frac{(-a^2 + b^2 - c^2)\,x - 2a\,(by - cz)}{a^2 + b^2 - c^2},$$

$$y' = \frac{(a^2 - b^2 - c^2)\,y - 2b\,(ax - cz)}{a^2 + b^2 - c^2},$$

$$z' = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)\,z - 2c\,(ax + by)}{a^2 + b^2 - c^2}$$

Qui le simmetrie sono di due specie: Se il centro è nella regione reale allora: $a^2 + b^2 - c^2 < o$ e la simmetria si riduce ad una rotazione di π intorno al centro (simmetria rispetto ad un centro); se il centro è nella regione ideale, e l'asse nella regione reale $a^2 + b^2 - c^2 > o$ e la simmetria è rispetto all'asse: Nel 1º caso posto

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}, \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}},$$

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}$$

si ha:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x' &= (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2) x + 2\alpha (\beta y - \gamma z), \\ y' &= (-\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) y + 2\beta (\alpha x - \gamma z), \\ z' &= -(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) z + 2\gamma (\alpha x + \beta y) \end{aligned}$$

ove: $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 - 1$ e il centro di simmetria ha le coordinate α, β, γ

Nel 2° caso posto:

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}, \qquad \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}},$$

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}$$

le equazioni della simmetria rispetto ad un asse sono:

$$\begin{aligned} x' &= (-\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) x - 2\alpha (\beta y - \gamma z), \\ y' &= (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) y - 2\beta (\alpha x - \gamma z), \\ z' &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) z - 2\gamma (\alpha x + \beta y) \end{aligned}$$

ove: $\alpha^2 + \beta^2 = 1 + \gamma^2$ e l'asse di simmetria ha le coordinate $\alpha, \beta, -\gamma$.

24. Due figure sono *congruenti* se possono trasformarsi l'una nell'altra mediante un movimento, ed esse hanno i segmenti e gli angoli corrispondenti uguali. Nella metrica generale il movimento è individuato quando si conoscono due coppie di elementi corrispondenti. Sia φ una quadratica (assoluto) e siano A, A'; B, B' le due coppie corrispondenti: dovrà essere $|AB| = |A'B'|$ cioè se la forma di 1ª specie (A, B) incontra l'assoluto negli elementi I, J e la (A', B') negli elementi I', J' si dovrà avere (1) $(IJAB) = (I'J'A'B')$. Siano i, j, i', j' le tangenti a φ in I, J, I', J', da A e A' conduciamo le due coppie di tangenti a φ; t_1, t_2 da A con gli elementi di contatto T_1, T_2, t'_1, t'_2 da A' con gli elementi di contatto T'_1, T'_2. Come si sa le due quaterne $I\,J\,T_1 T_2$; $I'\,J'\,T'_1 T'_2$ sono armoniche e però la proiettività su φ individuata dalle terne $I\,J\,T_1$; $I'J'T'_1$ fa

corrispondere a T_2, T'_2. Questa proiettività pone una omografia nella forma di 2ª specie nella quale due forme di 1ª specie corrispondenti sono determinate da due coppie di elementi corrispondenti su φ e due elementi corrispondenti sono i poli rispetto a φ di due forme di 1ª specie corrispondenti. Questa omografia è individuata dalle due quaterne di elementi: $L' \equiv i \cdot j$, I, J, T_1; $L' \equiv j' \cdot i'$, I', J', T'_1. In questa omografia φ corrisponde a se stessa, alla forma (I, J), la forma (I', J'), ad A, A' e però per la (1) a B, B'. Due elementi uniti dell'omografia (reali o immaginarii coniugati) E, F saranno su φ e il terzo (reale) è l'intersezione O delle tangenti e, f in E, F a φ. Ora osserviamo che per una coppia di elementi corrispondenti, passa una quadratica (traiettoria) che ha in E, F un doppio contatto con φ. Difatti nell'omografia le (E, F), e, f sono unite e però se C, C' è una coppia di elementi corrispondenti su φ, si ha: $E(OFAA') = E(OFCC')$; $F(EOAA') = F(EOCC')$ ma per una nota proprietà delle quadratiche $E(OFCC') = F(EOCC')$ segue quindi $E(OFAA') = F(EOAA')$ q. e. d. Poniamo $(E, F) \equiv o$ e consideriamo la forma $(A, A') \equiv l$ e sia $o \cdot l \equiv H$. Poichè la traiettoria per A, A' e la φ hanno un doppio contatto, le polari di H rispetto ad ambedue coincidono. Sia h la polare comune; h passa per O, incontra l nell'elemento H' coniugato armonico di H rispetto alle due coppie A, A' e $l \cdot \varphi$, ed è coniugato di l rispetto a φ come anche sono coniugate rispetto a φ, o e h, e le forme (O, A), (O, A') con o. Inoltre gli elementi $M \equiv o \cdot (O, A)$, $M' \equiv o\ (O, A')$ sono corrispondenti. Queste proprietà proiettive trasportate nella metrica generale dànno luogo alle seguenti proprietà relative ai movimenti:

« Date due figure congruenti F, F' è determinato un movimento che fa corrispondere le due figure ordinatamente elemento per elemento ».

Questo movimento o rotazione nel senso più generale si ottiene facendo corrispondere due segmenti $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ ordinatamente uguali delle due figure congruenti; tracciando le forme (A, A') (B, B') e nei centri C_1, C_2 dei segmenti $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ conducendo le forme h_1, h_2 ortogonali; l'elemento O che queste due forme hanno a comune e la polare o rispetto all'assoluto

sono il centro e l'asse del movimento. La metrica essendo ellittica, ovvero il centro di rotazione cadendo nella regione reale nel caso della metrica iperbolica la rotazione ha il suo centro in O ed è determinata dalla coppia di forme corrispondenti $a \equiv (O, A)$ $a' \equiv (O, A')$: l'ampiezza della medesima è data dall'angolo $\widehat{a . a'}$. Se la metrica è iperbolica h_1, h_2 possono essere non concorrenti; in tal caso il centro di rotazione è nella regione ideale, ma l'asse penetra nella regione reale, ed è ortogonale ad $h_1 . h_2$. Gli elementi M, M' ove le forme a, a' condotte per A, A' ortogonali all'asse o lo incontrano, sono corrispondenti, quindi | MM' | è l'ampiezza della rotazione di 2ª specie. Potrebbero infine h_1, h_2 riuscire paralleli, in tal caso il movimento è una traslazione e sull'oriciclo per A, A' l'arco AA' segna l'ampiezza.

Si è supposto che h_1, h_2 siano distinte: Se coincidono allora considerando le forme (A, A') (B, B'):

a) Se il loro elemento d'incontro è nella regione reale questo è l'asse di rotazione.

b) Se sono non concorrenti la forma ortogonale comune è l'asse.

c) Se sono parallele il movimento è una traslazione.

Se nelle considerazioni proiettive precedenti; supponiamo che gli elementi uniti E, F siano immaginarii coniugati e l'asse o si assume come forma all'infinito di una metrica Euclidea il cui assoluto è dato da o; E, F, si deducono considerazioni e costruzioni analoghe nella geometria Euclidea per quel che riguarda le rotazioni a quelle che si sono fatte nella metrica ellittica e iperbolica. Se poi h_1, h_2 riescono parallele, tali sono le forme (A, A'), (B, B') che divengono le traiettorie della *traslazione* e la lunghezza costante | AA' | = | BB' | dei segmenti che uniscono due elementi corrispondenti è l'ampiezza della traslazione.

25. Consideriamo ora due forme (II), (II$_1$) e supponiamo che sulla 1ª si sia posta una metrica ellittica, nella 2ª una metrica parabolica. Siano (ξ, η) le coordinate lineari di un elemento di (II), e (x, y) quelle lineari ortogonali (Cartesiane) di un elemento di (II$_1$) e sia

$$\xi^2 + \eta^2 = 1 \tag{1}$$

l'equazione dell'assoluto in (Π), abbiamo visto (n° 8) che le formule:

$$(2) \qquad \xi = \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \qquad \eta = \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2};$$

$$(2') \qquad x = \frac{\xi}{1-\eta}, \qquad y^2 = \frac{1-\xi^2-\eta^2}{(1-\eta)^2}$$

pongono una corrispondenza fra (Π) e (Π_1) in modo che ad un elemento di (Π_1) corrisponde un elemento di (Π), ma ad un elemento di (Π) corrispondono due elementi di (Π_1) in simmetria ortogonale rispetto all'asse $y = o$; inoltre alla regione reale di (Π) (interna all'assoluto) corrisponde la regione di (Π_1) per la quale $x > o$, e alla regione ideale di (Π) (esterna all'assoluto) corrisponde la regione di (Π_1) per la quale $x < o$; alla forma $y = o$ di (Π_1) corrisponde l'assoluto di (Π), alla $\eta = o$ il circolo $x^2 + y^2 = 1$ di (Π_1). Alle forme di 1ª specie di (Π) la rete di circoli ortogonali all'asse $y = o$ in (Π_1) e viceversa; alle $x = m$ $y = n$ di (Π_1) corrispondono il fascio di forme di 1ª specie: $m(1-\eta) = \xi$ per l'elemento $\xi = o$ $\eta = 1$ sull'assoluto, e il fascio di oricicli $\xi^2 + \eta^2 - 1 + n^2(1-\eta)^2 = o$ ortogonale al fascio di forme precedenti; assumendo questo doppio sistema di luoghi ortogonali in (Π) come sistema coordinato l'elemento lineare diviene

$$\delta s^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

e l'angolo di due direzioni:

$$tg\omega = \frac{dx\delta y - dy\delta x}{dx\delta x + dy\delta y}$$

Se poniamo $z = x + iy$ $\zeta = x - iy$ e osserviamo che uno degli affissi z o ζ serve a determinare il *medesimo elemento* nella regione reale della (Π), l'elemento lineare diviene:

$$(3) \qquad ds^2 = \frac{dz d\zeta}{y^2}$$

e l'angolo di due direzioni:

$$(4) \qquad e^{2i\omega} = \frac{dz\delta z_0}{dz_0 . \delta z}$$

Si è visto inoltre che il gruppo di sostituzioni lineari in (II_1) che trasformano la rete di circoli ortogonali all'asse $y = o$ in se stesso è dato dalle:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \qquad ab - cd = 1$$

ove $a\ b\ c\ d$ sono numeri reali: o come si dice dal gruppo delle *sostituzioni Fuchsiane*, e poichè in questo caso $(a + d)^2 > o$ le sostituzioni sono di 3 specie:

1° Ellittiche se $(a + d)^2 < 4$.

2° Iperboliche se $(a + d)^2 > 4$.

3° Paraboliche se $(a + d)^2 = 4$.

Esse inoltre trasformano in se stessa ciascuna porzione in cui la forma Euclidea (II_1) è divisa dall'asse $y = o$ (e dalla forma di 1ª specie all'infinito).

Interpretando le sostituzioni Fuchsiane nella forma iperbolica (II) risulta che esse formano un gruppo di trasformazioni proiettive che trasformano in se stesso l'assoluto e perchè sono in numero ∞^3 esse rappresentano appunto il gruppo dei movimenti nella forma iperbolica (II). Ora dall'essere a, b, c, d reali risulta che se $z' = \dfrac{az + b}{cz + d}$ si ha anche $\zeta' = \dfrac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$ e se z_1, z_2 sono due elementi di (II) e z'_1, z'_2 gli elementi corrispondenti si ha:

$$(*) \qquad (z'_1, z'_2, \zeta'_1, \zeta'_2) = (z_1, z_2, \zeta_1, \zeta_2)$$

Viceversa se z_1, z_2; z'_1, z'_2 sono due coppie di elementi corrispondenti che soddisfano alla (*) la sostituzione reale:

$$\frac{z' - z_1'}{z' - z'_2} : \frac{\zeta'_1 - z'_1}{\zeta'_1 - z'_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{\zeta_1 - z_1}{\zeta_1 - z_2}$$

fa corrispondere appunto a $z_1, z_2, \zeta_1, \zeta_2$; $z'_1, z'_2, \zeta'_1, \zeta'_2$. Ora vediamo d'interpretare geometricamente la condizione (*). Con-

sideriamo in (II) la forma di 1ª specie

$$(5) \qquad z\zeta - a(z+\zeta) = \rho$$

ove a e ρ sono reali; se h e k sono reali, poniamo:

$$z = \frac{h\lambda - ik}{\lambda - i}, \qquad \zeta = \frac{h\lambda + ik}{\lambda + i}$$

ove α è un parametro reale, e vediamo che valore devono avere h e k; sostituendo nella (5) si trova che h e k debbono essere radici dell'equazione

$$x^2 - 2ax - \rho = o$$

equazione che ha due radici reali. Ciò posto, osservando che $\zeta = \frac{K(-\lambda) - ik}{(-\lambda) - i}$, se λ_1, λ_2 sono i valori del parametro corrispondenti a z_1, z_2, se per brevità poniamo $(z_1, z_2) = (z_1, z_2, \zeta_1, \zeta_2)$ avremo:

$$(6) \qquad (z_1, z_2) = (\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1, -\lambda_2) = \frac{4\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}$$

ora osserviamo che per $\lambda = o, \lambda = \infty$ si ha:

$$z_o = k, \qquad z_\infty = h$$

e poichè h e k sono reali z_o, z_∞ appartengono all'assoluto e però: $(\lambda_1, \lambda_2, o, \infty) = e^{\mu\delta}$ ove δ è la distanza degli elementi z_1, z_2; ora se poniamo: $[z_1, z_2] = (z_1, z_2, h, k)$ si ha

$$[z_1, z_2] = (\lambda_1, \lambda_2, \infty, o) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = e^{-\mu\delta}$$

e per la (6) si ha

$$(\sigma') \qquad (z_1, z_2) = \frac{4[z_1, z_2]}{(1 + [z_1, z_2])^2}$$

e poichè $(z_1, z_2) > o$ la (6') trasforma la (*) nelle:

$$[z'_1, z'_2] = [z_1, z_2]; \quad e^{\mu\delta} = e^{\mu\delta'}; \quad \delta = \delta'$$

quindi ritroviamo le condizioni che i due segmenti corrispondenti debbono essere congruenti.

È facile vedere a ciascuna delle tre specie di sostituzione Fuchsiane quale movimento corrisponde in (II). Perciò osserviamo:

1° Se la sostituzione

$$(7) \qquad z' = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc = 1)$$

è ellittica, i valori di z per cui $z' = z$ sono due e immaginarii coniugati, poichè $(a + d)^2 < 4$, siano p, $\bar{\omega}$ essi sono gli affissi di un unico elemento unito nel movimento corrispondente in II, elemento che è situato nella regione reale, e perciò il movimento corrispondente è una *rotazione di 1ª specie:* posta (1) sotto la forma:

$$(7') \qquad \frac{z' - p}{z' - \bar{\omega}} = e^{i\Theta} \frac{z - p}{z - \bar{\omega}}$$

Si dimostra come nel caso della metrica ellittica mediante la (4) che Θ è l'ampiezza della rotazione. Le traiettorie sono date dall'equazione:

$$\text{mod.}\ (z - p) = \gamma \,.\, \text{mod.}\ (z - \bar{\omega})$$

ove γ è una costante come è evidente della (7').

2° Se la sostituzione

$$(7) \qquad z' = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc = 1)$$

è iperbolica i valori di z per cui $z' = z$, sono reali e distinti p_1, p_2 e in tal caso essi sono gli affissi di due elementi dell'assoluto ($\varphi = o$) di II che sono uniti e reali e però le sostituzioni Fuchsiane iperboliche rappresentano delle rotazioni di 2ª specie il cui asse ha per equazione:

$$(*) \qquad z\zeta - a(z + \zeta) = \rho$$

ove p_1 e p_2 sono le radici dell'equazione:

$$x^2 - 2ax - \rho = o$$

e però ρ e a sono determinate dall'uguaglianze:

$$a = \frac{p_1 + p_2}{2} \qquad \rho = - p_1 p_2$$

La sostituzione si può porre sotto la forma:

(7')
$$(7')\ \frac{z' - p_1}{z' - p_2} = \mathrm{K}\, \frac{z - p_1}{z - p_2} \quad (\mathrm{K} > 1)$$

e poichè $\mathrm{K} = (z', z, p_1, p_2) = [z', z]$, si ha che log. K ci dà l'ampiezza della traslazione sull'asse. Le traiettorie di (II) sono le corrispondenti di quelle di (Π_1) e quelle sono circoli per p_1, p_2; quindi le equazioni delle traiettorie sono:

$$z\zeta + gz + \gamma\zeta + r = o \qquad (g, \gamma \text{ coniugate, } r \text{ reale})$$

ove p_1, p_2 siano radici dell'equazione:

$$x^2 + (g + \gamma) z + r = o$$

e però:

$$g + \gamma = - (p_1 + p_2) \qquad r = p_1 p_2$$

e quindi potremo porre:

$$g = - \frac{p_1 + p_2}{2} + i\vartheta$$

e però l'equazione delle traiettorie è:

$$(8) \qquad z\zeta - \frac{p_1 + p_2}{2} (z + \zeta) + i\vartheta (z - \zeta) + p_1 p_2 = o$$

3° Se infine la sostituzione (7) è parabolica i valori di z per cui $z' = z$ sono reali e coincidenti p e in tal caso essi sono gli affissi di due elementi coincidenti sull'assoluto di (II) che sono uniti e però le sostituzioni Fuchsiane paraboliche rappresentano delle traslazioni. La sostituzione si può porre sotto la forma:

$$(7'') \qquad \frac{1}{z' - p} = \frac{1}{z - p} + c$$

ove c è reale; le traiettorie (oricicli) si ottengono dalle (8) per

$p_1 = p_2 = p$; esse sono:

$$(8') \qquad z\zeta - p(z + \zeta) - i\vartheta(z - \zeta) + p^2 = o$$

Le proposizioni inverse poi sono evidenti.

26. Se μ è una variabile reale e $\rho = p_2 - p_1 - 2\vartheta i$ l'espressione:

$$(1) \qquad z = \frac{\rho p_1 - i\mu p_2}{\rho - i\mu}$$

Soddisfa identicamente, come è facile verificare, la (8) del numero precedente: quindi ad ogni valore di μ corrisponde un elemento della traiettoria (8); per $\mu = o$, $\mu = \infty$ si hanno gli elementi p_1, p_2 di contatto con l'assoluto. Se μ, μ' sono due elementi corrispondenti poichè:

$$z' = \frac{\rho p_1 - i\mu' p_2}{\rho - i\mu'}$$

Si ha dalla (7')

$$\mu' = \text{K}\mu$$

ovvero se δ è l'ampiezza della traslazione sull'asse di traslazione:

$$(2) \qquad \mu' = e^{\delta}\,\mu\,.$$

Per soddisfare identicamente la (8') possiamo porre come è facile verificare:

$$z = p + \frac{2\vartheta}{i + 2\vartheta\mu}$$

ove μ è un parametro reale: e si ha dalla (7'')

$$(3) \qquad \mu' = \mu + c\,.$$

Ciò posto facciamo le seguenti osservazioni: Se p è l'affisso di un elemento della regione reale; il sottogruppo delle rotazioni intorno a p è, come si è visto:

$$(4) \qquad \frac{z' - p}{z' - \bar{\omega}} = e^{i\Theta}\,\frac{z - p}{z - \bar{\omega}}\,.$$

Se S è una rotazione corrispondente all'ampiezza Θ, S^k corrisponderà all'ampiezza $k\Theta$ e se Θ è incommensurabile con 2π il

gruppo delle S^k conterrà delle rotazioni infinitesime; se $\Theta = \frac{2n\pi}{m}$ ove n e m sono interi fra loro primi il gruppo delle rotazioni è ciclico, e tutte le rotazioni si ottengono dalla S di ampiezza minima $\frac{2\pi}{m}$; esse sono: $S^o, S, S^2, \ldots S^{m-1}$; questo gruppo di rotazioni è propriamente discontinuo in ogni parte della regione reale; viceversa se vogliamo che un gruppo di rotazioni intorno ad un elemento p della regione reale sia propriamente discontinuo deve il gruppo essere formato dalle successive potenze di una rotazione ciclica di ampiezza minima $\frac{2\pi}{m}$ ove m è un numero intero finito (v. n. 4°). Inoltre osserviamo che se una rotazione trasforma un elemento della regione reale in un elemento infinitamente vicino essa è infinitesima se il centro di rotazione dista di un segmento finito dall'elemento in questione; dalla (4) si ha:

$$z' - z = \frac{(z-p)\,(z'-\tilde{\omega})}{p-\tilde{\omega}}\,(e^{i\Theta}-1)$$

e però:

$$|\,z'-z\,| = \frac{|\,z-p\,|\cdot|\,z'-\tilde{\omega}\,|}{|\,p-\tilde{\omega}\,|}\;|\,e^{i\Theta}-1\,|$$

e poichè se r è finito e positivo per ipotesi $\frac{|z-p|\,|z'-\tilde{\omega}|}{|\,p-\tilde{\omega}\,|} > r$ avremo se $|\,z'-z\,|$ è piccolissima per uno speciale valore di z che tale deve essere $|\,e^{i\Theta}-1\,|$; è però Θ q. e. d. Il sotto gruppo delle rotazioni che hanno per asse la (*) (n.° preced.) è dato dalla (2); tutte queste rotazioni formano un fascio di proiettività i cui elementi uniti sono $\mu = o$ $\mu = \infty$. Se S è una rotazione di ampiezza δ, il sottogruppo generato da S è $S^o\ S\ S^2\ S^3 \ldots S^n \ldots$ costituito da infinite proiettività ma discontinuo; se S_1, S_2 sono due proiettività (3) corrispondenti alle ampiezze δ_1, δ_2 si hanno a considerare due casi:

1° δ_1, δ_2 sono commensurabili; allora se δ_3 è la massima comune misura si avrà $\delta_1 = m\delta_3$, $\delta_2 = n\,\delta_3$ e però le sostituzioni di ampiezza δ_1, δ_2 sono le potenze di una medesima sostituzione di ampiezza δ_3.

2° Se δ_1, δ_2 sono incommensurabili (vedi n.° 5) si possono determinare due numeri interi m ed n tali che $m\delta_1 - n\delta_2 = \varepsilon$ ove ε è un ampiezza piccola a piacere e in tal caso la sostituzione $S_1^m . S_2^{-n}$ è infinitesima.

Di qui segue che inversamente perchè un gruppo di rotazioni di 2ª specie che hanno uno stesso asse direttore sia propriamente discontinuo debbono tutte le sue sostituzioni essere potenze di una tale rotazione S di ampiezza minima δ.

Osserviamo poi che su di una speciale traiettoria due elementi sono infinitamente vicini la rotazione è infinitesima; poichè dalla (2) si ha

$$\mu' - \mu = \mu(e^{\delta} - 1)$$

e se $|\mu' - \mu| < \varepsilon$ deve essere anche δ piccolissimo, ecc.

Infine se consideriamo tutte le traslazioni che hanno per traiettorie uno stesso fascio di oricicli esse formano un gruppo rappresentato dalla (3) e c si dice ampiezza della traslazione; come nel caso precedente qui si può asserire che condizione necessaria e sufficiente che un gruppo di traslazioni che ammette per traiettorie un fascio di oricicli sia propriamente discontinuo è che tutte le traslazioni del gruppo siano le successive potenze di una traslazione di ampiezza minima c. Ed inoltre se una traslazione fa corrispondere due elementi infinitamente vicini della regione reale essa è infinitesima.

27. Ciò premesso è facile trovare le condizioni alle quali deve soddisfare un gruppo d'infiniti movimenti perchè sia propriamente discontinuo in tutta la regione reale.

Intanto i singoli sottogruppi, ciascuno dei quali è formato dei movimenti che ammmettono un fascio comune di traiettorie, debbono soddisfare alle condizioni del numero precedente; inoltre considerando l'insieme dei centri delle rotazioni di 1ª specie dico che esso deve essere *isolato* e i suoi elementi limiti sono sull'assoluto.

Difatti fissato un elemento L qualsiasi della regione reale, il quale potrebbe anche essere un centro di rotazione; due ipotesi possono farsi:

1° O esiste un *intorno* di L nell'interno del quale non cadono, oltre L al più, centri di rotazione, e in tal caso se ρ è la distanza del centro di rotazione più vicino a L, da L, il circolo di centro L e di raggio ρ è il massimo, di quelli di centro L, che non contengano centri di rotazione, oltre L al più.

2° O per qualsiasi valore di ρ piccolo a piacere esistono nell'interno del circolo di centro L e raggio ρ dei centri di rotazione in numero infinito; siano $O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots O_{i_n}, \ldots$ e siano $m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots m_{i_n}, \ldots$ i rispettivi cicli i quali sono numeri interi e finiti; di qui segue che dovranno aversi almeno due centri O_h, O_k contenuti in un intorno quanto si voglia piccolo di L, tali che ad essi corrispondano due rotazioni di ugual ciclo $m_h = m_k = m$. Ciò posto non ci rimane che ripetere quello che è stato detto al n.° 17 per provare che in tal caso il gruppo ammetterebbe un movimento infinitesimo e perciò sarebbe impropriamente discontinuo in tutta la regione reale. Di qui seguono alcune conseguenze:

Il sistema dei centri di rotazioni è isolato nella regione reale ma i suoi elementi limiti sono sull'assoluto.

Il gruppo è propriamente discontinuo in tutta la regione reale; difatti dato un elemento M della regione tutti i suoi corrispondenti per le sostituzioni paraboliche, iperboliche, cadono fuori di un intorno di M finito, che se in un intorno per quanto si voglia piccolo di M cadessero elementi corrispondenti di M, nel gruppo vi sarebbero sostituzioni infinitesime. Inoltre abbiamo visto che si può determinare un numero r finito e tale che se m è l'affisso di M e a_i quello del centro di rotazione propria, oltre m al più, vicino più degli altri a m si abbia $|m - a_i| \geq r$ e perciò, poichè per ipotesi il gruppo non ha rotazioni infinitesime, pel n. 26 si può determinare un intorno finito di M nell'interno del quale non cade nessun elemento corrispondente di M per rotazioni. Infine possiamo asserire che dato un elemento M qualsiasi della regione reale è sempre possibile determinare un intorno finito di M e tale che tutti gli elementi corrispondenti di M per i movimenti del gruppo cadano fuori dell'intorno. Si ha in altre parole, che se un gruppo di movimenti è discontinuo e privo di sostituzioni infinitesime è propriamente

discontinuo in tutta la regione reale. Di qui segue che anche tutti gli elementi corrispondenti di un elemento M formano un insieme isolato; essi si vanno addensando in elementi dell'assoluto perchè è facile vedere che sull'assoluto il gruppo dei movimenti è impropriamente discontinuo. Difatti dato un elemento qualsiasi X della quadratica, gl' infiniti elementi corrispondenti di X si andranno addensando in elementi limiti della stessa quadratica.

La condizione di non ammettere movimenti infinitesimi che è necessaria perchè il gruppo sia propriamente discontinuo è anche sufficiente perchè se il gruppo non fosse propriamente discontinuo nell'intorno di qualche elemento della regione reale, esso ammetterebbe movimenti infinitesimi. Possiamo quindi dire:

Perchè il gruppo di movimenti non abbia movimenti infinitesimi debbono essere soddisfatte le condizioni seguenti:

a) I movimenti parabolici e iperbolici che hanno le stesse traiettorie debbono essere le successive potenze di uno stesso movimento di ampiezza finito.

b) Le rotazioni del gruppo debbono essere cicliche.

c) I centri di rotazione debbono formare un insieme isolato nella regione reale.

Quando queste condizioni sono soddisfatte; il gruppo di movimenti è propriamente discontinuo in tutta la regione reale, lo è impropriamente sull'assoluto. In altri termini possiamo dire che la condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo d'infiniti movimenti nella metrica iperbolica sia propriamente discontinuo in tutta la regione reale è che non abbia sostituzioni infinitesime.

Questo teorema enunciato per il gruppo di sostituzioni Fuchsiane nella forma Euclidea corrispondente alla iperbolica, è dovuto al Poincarè.

Sia, ad esempio, il gruppo di movimenti rappresentato dalle sostituzioni:

$$z' = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \quad (\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1) \tag{2}$$

ove α_i, β_i, γ_i, δ_i si prendono tutti i valori interi, sostituzioni che si dicono *unimodulari*. Questo gruppo è propriamente discon-

tinuo in tutta la regione reale non lo è in ogni elemento dell'assoluto la cui coordinata x è razionale. Difatti

1° Essendo α_i, β_i, γ_i, δ_i interi il più piccolo valore che può prendere $|\delta_i - \alpha_i|$ dopo 1 è zero e se $\alpha_i = \delta_i$ la (2) diviene:

$$z' = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \alpha_i}$$

e se $\beta_i = \gamma_i = o$; $|\alpha_i| = 1$ e $z' = z$; quindi il gruppo *non ammette sostituzioni infinitesime* e però è propriamente discontinuo nella regione reale.

2° Se $z = x = \dfrac{m}{n}$ ove m, n sono primi fra di loro, esso si può considerare come corrispondente dell'elemento $x = o$, difatti per $x = o$ si ha dalla (2)

$$x' = \frac{\beta_i}{\delta_i}$$

e se vogliamo che $\dfrac{\beta_i}{\delta_i} = \dfrac{m}{n}$; α_i e γ_i sono determinati dalla:

$$n\alpha_i - m\gamma_i = 1 .$$

Ciò posto, dato $x = \dfrac{m}{n}$ e $x' = \dfrac{m'}{n'}$ ove $\left|\dfrac{m'}{n'} - \dfrac{m}{n}\right| < \varepsilon$ essendo ε piccola a piacere, x e x' come corrispondenti dello o mediante le sostituzioni S_1, S_2 corrispondono fra loro mediante la $S_1 . S_2^{-1}$.

28. Se un gruppo di movimenti è discontinuo (propriamente) nella regione reale è chiaro che sarà possibile decomporre questa regione o una parte di essa in una infinità di *pezzi* che godano le proprietà seguenti (1):

a) Ciascuno dei *pezzi* corrisponde a un movimento del gruppo; se le sostituzioni rappresentative dei movimenti le indichiamo con:

$$z' = f_i(z)$$

(1) La teoria delle *Sostituzioni discontinue* è dovuta principalmente al Poincaré e al Klein, che la hanno posta a base della teoria delle *Funzioni Automorfe* (Per la bibliografia vedi E. Pascal: *Repertorio di Matematiche*, vol. I, Hoepli).

possiamo dire regione R_i quel *pezzo* che corrisponde alla $f_i(z)$; R_o sarà la regione corrispondente alla sostituzione identica R_o. Quando l'elemento z appartiene a R_o, l'elemento $f_i(z)$ appartiene ad R_i. Tutte queste regioni sono *congruenti*, perchè si trasformano l'una nell'altra mediante un movimento. Questa divisione in regioni è regolare, inquantochè deformando in modo continuo le regioni si può generare un nuovo modo di divisione in modo che, una data regione del nuovo modo di divisione coincida con una, pure data, delle antiche; difatti applicando alla regione R_i trasformate di R_o mediante la $f_i(z)$, la sostituzione $f_k(z)$ del gruppo si ha quella stessa regione che si sarebbe ottenuta dalla R_o trasformandola mediante la $f_i(f_k(z)) = f_j$; quindi alla R_o corrisponde la R_k e alla R_i la R_j, pure della detta divisione; si vede inoltre che ogni regione del nuovo modo di divisione coincide con una regione del modo primitivo. Quindi la ricerca dei gruppi discontinui di movimenti si può ricondurre all'altra di suddividere la regione propria o una sua parte in regioni fra loro congruenti.

Due di siffatte regioni che confinano mediante un comune pezzo di contorno si dicono *adiacenti*. Sia R_o la regione fondamentale, R_p una regione limitrofa, AB il pezzo di contorno lungo il quale confinano; AB si dice *lato di* R_o. Se si suppone che una parte della regione propria sia stata divisa in regioni congruenti, vi potrebbe essere una parte del contorno di R_o che servisse di confine con una parte di forma di 2ª specie che non è stata suddivisa in regioni R; questa porzione di contorno si dice ancora lato di R_o; essa *potrebbe* appartenere all'assoluto e in tal caso il lato si dice di 2ª *specie;* altrimenti il lato si dice di 1ª *specie.*

Le *estremità* di un lato di R_o si dicono vertici; essi sono di 3 sorta:

1° Vertici che appartengono alla regione propria; di 1ª *specie.*

2° Vertici che appartengono all'assoluto e che separano due lati di 1ª specie; di 2ª *specie.*

3° Vertici sull'assoluto e che separano un lato di 1ª *specie* e un lato di 2ª specie; di 3ª *specie.*

Se l'elemento z è interno a R_o, $f_i(z)$ è interno ad R_i regione *tutta* esterna a R_o, perchè l'essere il gruppo propriamente discontinuo porta con sè che la divisione in regioni R divide la ragione propria o una sua parte *una sola volta e senza sovrapporsi*, e però non si possono avere in R_o due elementi corrispondenti o ambedue interni o uno interno, uno sul perimetro; perchè se per quanto piccolo si determini R_o non si verificasse la precedente proprietà, il gruppo non sarebbe più propriamente discontinuo in ogni elemento della regione propria.

Se invece λ_p è un lato di R_o della 1^a sorte, un elemento di λ_p appartiene a due regioni contigue R_o, R_p e quindi si può considerare λ_p come appartenente a R_p e se f_p trasforma R_o in R_p, f_p^{-1} trasformerà R_p in R_o e λ_p in un altro lato λ'_p di R_o il quale separerà R_o da R'_p corrispondente di R_o nella f_p^{-1}. I lati λ_p, λ'_p si dicono *coniugati*. Ora di un lato λ_p non possono essere coniugati due lati λ'_p, λ''_p altrimenti vi sarebbero due trasformazioni $f_p^{-1}(z)$, $f_q^{-1}(z)$ che trasformerebbero R_p contiguo e R_o lungo λ_p, in R_o e però ad un elemento di R_p corrisponderebbero due elementi di R_o che si corrisponderebbero nella $f_p(z) \, . \, f_q^{-1}(z)$. Però potrebbe darsi che si avesse $f_p^{-1}(z) = f_p(z)$ e però la $f_p(f_p(z))$ si ridurrebbe alla sostituzione identica; in tal caso il movimento corrispondente nella regione propria di f_p è una rotazione propria di ampiezza π. In tal caso la $f_p(z)$ è della forma:

$$\frac{f_p(z) - a}{f_p(z) - \alpha} = - \frac{z - a}{z - \alpha}$$

se a è l'elemento unito. In tal caso la sostituzione precedente o rotazione trasforma λ_p in se stesso e però λ_p passa per a e si spezza in due parti fra loro congruenti (metà) allora possiamo considerare a come vertice e le due metà di λ_p come lati distinti e fra loro coniugati.

Di qui possiamo dedurre:

1° I lati di 1^a sorte sono distribuiti in coppie di lati coniugati.

2° Due lati coniugati sono congruenti.

3° Gli elementi del perimetro di R_o escludendo per ora i vertici, sono coniugati due a due.

Di qui segue che se i lati di 1ª sorte sono in numero finito essi sono in numero pari $2n$, due a due coniugati, quali in generale h_i, h_{i+n} $(1 \leq i \leq n)$. In questa ipotesi aggiungiamo le seguenti considerazioni: λ_p separi le regioni congruenti R_o, R_p trasformate l'una dall'altra mediante la f_p; poichè λ_p è coniugata di λ_{n+p} la f_{n+p} trasforma R_o in R_{n+p}, ma f_p trasforma λ_{n+p} in λ_p, mentre f_{n+p} trasforma λ_p in λ_{n+p} e però si ha

$$f_{n+p} = f_p^{-1}.$$

Per brevità indichiamo con $f_l \ldots f_k \,.\, f_h \,.\, f_i$ (*) il risultato delle sostituzioni applicate successivamente sull'elemento z. Sia R_i la regione corrispondente alla R_o mediante la f_i e λ_p, λ_{n+p} due lati coniugati di R_o, $\lambda_p^{(i)}$, $\lambda_{p+n}^{(i)}$ i corrispondenti di R_i la sostituzione $f_i \,.\, f_p \,.\, f_i^{-1}$ fa corrispondere ad un elemento di $\lambda_{p+n}^{(i)}$ un elemento di $\lambda_p^{(i)}$; se quindi R_k è il poligono del gruppo adiacente a R_i lungo $\lambda_p^{(i)}$, R_h quello adiacente a R_o lungo λ_p, si ha: che se la sostituzione per passare da R_o a R_h è f_p, quella per passare da R_i a R_k è $f_i \,.\, f_p \,.\, f_i^{-1}$, e la f_k per passare da R_o a R_k è data da $f_i \,.\, f_p \,.\, f_i^{-1} \,.\, f_i = f_i \,.\, f_p$, e la sostituzione che fa passare da R_h a R_k è $f_i \,.\, f_p \,.\, f_p^{-1} = f_i$. Queste osservazioni ci dànno modo di trovare quale è la sostituzione che corrisponde ad una data regione R_γ. Sia A un elemento interno a R_o e B un elemento interno ad R_γ, e uniamo questi due elementi con un arco finito che non passi per nessun vertice e incontri ogni lato una sola volta; se questo arco, come si suppone, ha tutti i suoi elementi a distanza finita dall'assoluto, incontrerà un numero finito di regioni perchè in ogni pezzo della regione propria non limitato dall'assoluto per la discontinuità del gruppo non possono entrare che un numero finito di regioni R_o; è poi facile vedere che queste regioni R a due a due adiacenti ricoprono una regione a connessione semplice che può essere tutta o in parte limitata dall'assoluto. Difatti dato un poligono R_i o un suo lato è sull'assoluto o è di 1ª specie ed in tal caso si ha un poligono adiacente lungo esso. Ciò posto suppongasi che il detto arco esca da R_o ed entri in R_{α_1} tra-

(*) Da destra verso sinistra.

versando il lato λ_{α_o}, la sostituzione che segna il passaggio è f_{α_o}, e supponiamo poi che detto arco attraversi le regioni R_{β_1} R_{β_2}..... $R_{\beta_\nu} \equiv R_\gamma$ e che esca dalla regione R_{β_i} per entrare nella $R_{\beta_{i+1}}$ attraversando il lato $\lambda_{\alpha_i}^{(\beta i)}$, la sostituzione che segna il passaggio sarà $f_{\beta_i} \cdot f_{\alpha_i} \cdot f_{\beta_i}^{-1}$ e però la sostituzione che porta da R_o a $R_{\beta_{i+1}}$ è $f_{\beta_i} \cdot f_{\alpha_i} \cdot f_{\beta_i}^{-1} \cdot f_{\beta_i} = f_{\beta_i} \cdot f_{\alpha_i}$. Si ha quindi la relazione:

$$(1) \qquad f_{\beta_{i+1}} = f_{\beta_i} \cdot f_{\alpha_i} \quad (i = o,\ 1,\ 2 \ldots \nu - 1)$$

alle (1) aggiungendo l'identità $f_{\alpha_o} = f_{\alpha_o}$ si ha con successive sostituzioni:

$$f_{\beta_\nu} = f_{\alpha_o} \cdot f_{\alpha_1} \cdot f_{\alpha_2} \cdots f_{\alpha_\nu}$$

ove gli indici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ sono fra i numeri $1, 2, \ldots 2n$ e possono essere tutti o in parte fra loro uguali. Ora f_{β_ν} è una qualsiasi sostituzione del gruppo e le $f_1, f_2, \ldots f_{2n}$ sono le n sostituzioni e le loro inverse che trasformano l'uno nell'altro due lati coniugati di R_o. Di qui segue intanto che ogni sostituzione o movimento del gruppo è combinazioni di n sostituzioni $f_1, f_2, \ldots f_n$ e delle loro inverse, le quali si diranno formare la *base* del gruppo di movimenti. Ora siccome è unica la sostituzione f_{β_ν} che trasforma R_o in R_{β_ν} seguendo per andare un altro cammino possiamo incontrare un altra successione di poligoni e avere

$$f_{\beta_\nu} = f_{\alpha'_o} \cdot f_{\alpha'_1} \cdots f_{\alpha'_\mu}$$

ove anche le $f_{\alpha'_o} \ldots f_{\alpha'_\mu}$ sono le sostituzioni fondamentali $f_1, f_2 \ldots f_{2n}$ (tutte o in parte, ripetute o no). Avremo quindi dalle relazioni della forma

$$f_{\alpha_o} \cdot f_{\alpha_1} \cdots f_{\alpha_\nu} = f_{\alpha'_o} \cdots f_{\alpha'_\mu}$$

ovvero notando che $f^{-1}_{\alpha'_i} = f_{\alpha'_i + n}$ potremo scrivere

$$(2) \quad f_{\alpha_o} \cdot f_{\alpha_1} \cdots f_{\alpha_\nu} \cdot f_{\alpha'_\mu + n}, \cdots f_{\alpha'_o + n} = 1 .$$

La (2) si ottiene considerando un circuito chiuso che parte da un elemento di R_o e vi ritorna dopo avere attraversato un certo numero di poligoni. Più generalmente posso considerare un circuito chiuso che attraversi i poligoni R_{i_o}, $R_{i_{\alpha_1}}$, ... $R_{i_{\beta_\mu}} \equiv R_{i_o}$ tra i quali non sia compreso R_o ma questo ci porta a delle relazioni del tipo (2). Difatti supponiamo di percorrere il circuito in un certo senso a partire da R_i se poniamo (*) $f_{\alpha_r}^{(i)} = f_i \cdot f_{\alpha_r} f_i^{-1}$ la relazione a cui dà luogo il circuito chiuso è del tipo:

$$(^{**})\ f_{\alpha_o}^{(i)} \cdot f_{\alpha_1}^{(i)} \dots f_{\alpha_\mu}^{(i)} = 1\,.$$

Ora la f_i^{-1} che trasforma R_i in R_o, trasforma il precedente circuito in uno del tipo (2), d'altra parte per i valori (*) la (**) diviene

$$f_i \cdot f_{\alpha_o} \cdot f_{\alpha_1} \dots f_{\alpha_\mu} \cdot f_i^{-1} = 1 \ ;\ f_{\alpha_o} \cdot f_{\alpha_1} \dots f_{\alpha_\mu} = 1$$

come si era affermato. Ora ci domandiamo: quante sono le relazioni precedenti, indipendenti? Siano A_1, A_2, ... A_ρ i vertici di R_o, tutto in giro ai quali si connettono poligoni del gruppo e che sono come vedremo i vertici di 1ª specie: siano R_o, $R_{\alpha_1}^{(i)}$, ... $R_{\beta_\mu}^{(i} \equiv R_o$ i poligoni che si connettono intorno ad A_i; un circuito infinitesimo che giri intorno ad A_i darà la relazione:

$$(3)\ f_{\alpha_o(i)} \cdot f_{\alpha_1(i)} \dots f_{\alpha_{\mu_i}(i)} = 1 \ (i = 1\,, 2\,, \dots \rho)\,.$$

Ora io dico che le (3) al massimo sono tutte le relazioni indipendenti che intercedono fra le f_1, f_2 ... f_{2n}. Perciò facciamo le seguenti osservazioni:

1° Ogni circuito chiuso infinitesimo intorno ad un vertice di un poligono R dà luogo ad una relazione (3) come risulta dalle considerazioni generali precedenti.

2° Un contorno chiuso AMA che non contenga nel suo intorno nessun vertice dei poligoni R dà luogo ad una relazione identica; difatti questo contorno si potrà dividere in due parti AMB ; ANB e se AMB traversa i poligoni R_o, R_{α_1}, ... R_{β_i} incontrando i lati λ_{α_o}, $\lambda_{\alpha_1}^{(\alpha_o)}$ ... $\lambda_{\alpha_i}^{(\beta_i - 1)}$ ANB traverserà la stessa serie di poligoni incontrando gli stessi lati e però ambedue

dànno la sostituzione: $f_{\alpha_0} \cdot f_{\alpha_1} \cdots f_{\alpha_\mu}$ e però il cammino AMBNA dà la sostituzione identica:

$$f_{\alpha_0} \cdot f_{\alpha_1} \cdots f_{\alpha_\mu} \cdot f_{\alpha_\mu + n} \cdots f_{\alpha_0 + n} = 1 .$$

3° Sia dato un contorno chiuso (γ) che racchiuda μ vertici di poligoni R, siano L, M due suoi elementi, spezziamo l'area chiusa da (γ) in due, mediante il cammino LM; si hanno così i due contorni $(\gamma_1) + \mathrm{ML}$, $(\gamma_2) + \mathrm{LM}$, se gli elementi L, M spezzano (γ) in (γ_1), (γ_2); e supponiamo che il contorno $(\gamma_1) + \mathrm{LM}$ racchiuda un solo vertice. La relazione relativa al contorno (γ) sia

$$(4) \qquad f_{h_1} \cdot f_{h_2} \cdots f_{h_\nu} = 1 .$$

È chiaro poi che, se la trasformazione relativa al percorso (γ_1) è complessivamente f_{γ_1}, quella relativa al percorso γ_2 è f_{γ_2}, si avrà identicamente:

$$(4') \qquad f_{h_1} \cdots f_{h_\nu} = f_{\gamma_2} \cdot f_{\gamma_1}$$

Sia f_h la trasformazione relativa al percorso $\overline{\mathrm{ML}}$, quella relativa al percorso $\overline{\mathrm{LM}}$ sarà f_h^{-1}. D'altronde la trasformazione corrispondente al percorso $(\gamma_1) + \overline{\mathrm{ML}}$ è: $f_h \cdot f_{\gamma_1}$ quella relativa al percorso $(\gamma_2) + \overline{\mathrm{LM}}$ è $f_{\gamma_2} \cdot f_h^{-1}$, e si ha identicamente

$$f_{\gamma_2} \cdot f_{\gamma_1} = f_{\gamma_2} \cdot f_h^{-1} \cdot f_h \cdot f_{\gamma_1}$$

e per la (4′) e per la (4):

$$f_{\gamma_2} \cdot f_h^{-1} \cdot f_h \cdot f_{\gamma_1} = 1$$

e però la (4) è una conseguenza delle: $f_{\gamma_2} \cdot f_h^{-1} = 1$, $f_h \cdot f_{\gamma_1} = 1$. Quindi ad ogni circuito che comprende μ vertici si possono sostituire μ circuiti elementari intorno ai vertici di R e a ciascuno di questi circuiti elementari si può sostituire il corrispondente intorno ad un vertice di R_o. Questo teorema può subire un ulteriore determinazione ma prima veniamo a fare altre considerazioni sul poligono R_o.

29. La condizione alla quale è assoggettata ogni regione R_i di contenere cioè un solo elemento corrispondente ad un elemento dato, non è tale da definirla completamente, anzi dato

un gruppo discontinuo G ad esso corrispondono *infinite* decomposizioni della regione interna all'assoluto in regioni R. Sia infatti una prima divisione corrispondente al gruppo G e R_0 la regione che si assume come fondamentale, S_0 una sua porzione; indicheremo con: $S_i \equiv f_i . S_0$ la regione dedotta dalla S_0 mediante le f_i, S_i è la porzione di $R_i \equiv f_i . R_0$ corrispondente di S_0. Sia f_p un'altra sostituzione di G e $S_p \equiv f_p . S_0$; $S_p^{(i)} \equiv f_p^{(i)} . S_i$ ove $f_p^{(i)} \equiv f_i . f_p . f_i^{-1}$ si avrà: $S_p^{(i)} \equiv f . f_p . f_i^{-1} . f_i . S_0 \equiv f_i . f_p . S_0$. Indichiamo la sostituzione $f_i . f_p$ con f_{i_p} e la regione $S_p^{(i)}$ con S_{i_p}; deduciamo dalla R_0 una nuova regione R'_0 togliendo la S_0 e aggiungendo la S_p, avremo $R'_0 \equiv R_0 + S_p - S_0$. Ora dalle uguaglianze precedenti si deduce $S_{i_p} \equiv f_i . f_p . S_0 \equiv f_i . S_p$ e però:

$$f_i . R'_0 \equiv f_i . R_0 + f_i . S_p - f_i . S_0 \equiv R_i + S_{i_p} - S_i \equiv R'_i .$$

Ora è chiaro:

1° Che in R'_0 non si hanno due elementi corrispondenti (escluso il contorno) perchè tale proprietà ha luogo in $R_0 - S_0$ e in S_0 e quindi in S_p e inoltre un elemento di S_p è corrispondente di un elemento di S_0 e *non* di $R_0 - S_0$.

2° Che in R'_i vi è il corrispondente di ogni elemento di R'_0, poichè in $R_i - S_i$ vi è il corrispondente di ogni elemento di $R_0 - S_0$ e in S_{i_p} il corrispondente di ogni elemento di S_p e ad un elemento di R'_0 corrisponde un solo elemento di R'_i e viceversa per il numero 1°.

Si ha così una nuova divisione nella regione propria della forma di 2ª specie in regioni R'_i soddisfacenti alle note condizioni e corrispondenti al medesimo gruppo G ed è chiaro che se due siffatte divisioni hanno una regione comune coincidono.

Si è supposto che S_0 faccia parte di R_0, ma S_p è data ad arbitrio, quindi in generale S_p è esterno a R_0 e così S_{i_p} a R_i e le regioni R'_i sono formate di *due pezzi separati* $R_i - S_i$, S_{i_p}. In particolare se supponiamo, che:

a) S_0 sia contigua internamente a una porzione del contorno di R_0;

b) Che f_p trasformi uno dei lati comuni a S_0, R_0 nel coniugato;

Sarà S_p contiguo esternamente a uno dei lati di R_0 e così S_{i_p} contiguo esternamente ad uno dei lati di R_i e in tal caso R'_i è di un sol pezzo (e a un sol contorno o *semplicemente connessa*). Ciò posto sia in una certa divisione corrispondente al gruppo G, R_0 il poligono fondamentale, siano λ_p λ_{p+n} due lati coniugati rispetto alla f_p, A, B i due estremi (vertici) di λ_p, A', B' i due estremi di λ_{p+n}; uniamo A, B col segmento AB di forma di 1ª specie, e supponiamo che la regione S_0 limitata da λ_p e $\overline{AB}$ sia tutta interna e R_0, avremo allora· $R_0 = S_0 + (R_0 - S_0)$; la f_p trasforma λ_p in λ_{p+n}, gli estremi A, B negli estremi A', B' e però il segmento $\overline{AB}$ nel segmento $\overline{A'B'}$ e la S_0 nella S_p (congruente) limitate da λ_{p+n} e dal segmento $\overline{A'B'}$; la nuova regione è semplicemente connessa e per le considerazioni fatte precedentemente può essere presa come regione fondamentale di una divisione poligonale corrispondente al gruppo e inoltre due lati coniugati sono sostituiti da segmenti rettilinei. Se il segmento $\overline{AB}$ fosse tutto esterno a R_0, $\overline{A'B'}$ sarebbe interno e allora basterebbe aggiungere S_0 e togliere S_p; se infine $\overline{AB}$ attraversasse λ_p S_0 sarebbe di più pezzi $S_0^{(1)}$, $S_0^{(2)}$, ... $S_0^{(i)}$, ... dei quali alcuni interni ad R_0 altri esterni e se $S_0^{(i)}$ è esterno il corrispondente $S_p^{(i)}$ è interno è viceversa; dunque basta togliere da R_0 quegli $S_0^{(i)}$ che cadono internamente e aggiungere quegli $S_0^{(i)}$ che cadono esternamente e fare inversamente con gli $S_p^{(i)}$. Procedendo così per ogni coppia di lati coniugati si può giungere ad una divisione della regione propria tale che nei poligoni R_i i lati di 1ª specie sono segmenti rettilinei a due a due congruenti; i segmenti di 2ª specie poi sono archi di assoluto; siffatti poligoni li diremo *normali*. Però dato il gruppo G la condizione che i poligoni della corrispondente divisione siano normali non vale ancora a determinarli completamente e però: *Un medesimo gruppo Fuchsiano può essere generato da un infinità di poligoni normali* R_0. Perciò basta osservare che se S_0, posta internamente a R_0, è a lati rettilinei, e S_0, R_0 hanno almeno un lato λ_p in comune e si toglie da R_0 la S_0 e si aggiunge la S_p trasformata di S_0 mediante la f_p che cambia λ_p in λ_{p+n} il nuovo poligono fondamentale $R_0 - S_0 + S_p$ è normale.

Ora dato un poligono R_o i cui lati siano di due specie; archi di assoluto e n coppie di lati rettilinei, in modo che i lati di una coppia siano congruenti, sono determinati n movimenti e le sostituzioni corrispondenti che trasformano l'uno nell'altro i lati di una coppia e però è determinato il gruppo generato da questi n movimenti; ma si domanda: Questo gruppo è privo di sostituzioni infinitesime? O in altri termini i poligoni dedotti da R_o mediante le sostituzioni del gruppo ricoprono, completamente e *una sola volta* la regione propria o una sua parte? Questa questione si riduce all'altra: Un poligono normale R_o corrispondente ad un gruppo G non deve soddisfare ad altre condizioni oltre quelle imposte ai lati? A questo proposito veniamo a fare le seguenti considerazioni rispetto ai vertici di R_o.

Un gruppo di vertici corrispondenti si dice *formare un ciclo*. Fissiamo un senso di descrizione del contorno di R_o in modo che un elemento, percorrendo il contorno in questo senso incontri i vertici in un certo ordine. Assumeremo questo senso come positivo, negativo l'opposto.

Siano $\overline{A_{p-1} A_p} \equiv \lambda_p \qquad \overline{A_{p+n-1} A_{p+n}} \equiv \lambda_{p+n}$

due lati coniugati, f_p la sostituzione che trasforma λ_p in λ_{p+n} e quindi R_o in R_p congruente ad R_o ed adiacente esternamente ad esso lungo λ_{p+n}; il movimento corrispondente porterà dunque A_{p-1} su A_{p+n} e A_p su A_{p+n-1} quindi queste due coppie di vertici sono coniugate e però porremo $A_{p+n} \equiv A_{p-1}^{(p)}$, $A_{p+n-1} \equiv A_p^{(p)}$; se dunque il senso positivo sul contorno di R_o è $\overrightarrow{A_{p-1} A_p} \equiv \overrightarrow{A_{p+n-1} A_{p+n}} \equiv \overrightarrow{A_p^{(p)} A_{p-1}^{(p)}}$, il senso positivo su R_p sarà dato da $\overrightarrow{A_{p-1}^{(p)} A_p^{(p)}}$ e però il senso positivo di R_p determina su R_o il senso negativo. Ciò posto possiamo stabilire la seguente regola per trovare successivamente i coniugati di un vertice A_{p-1} di R_o. Sia A_{p-1} un vertice di R_o e stabiliamo sul contorno di R_o un senso di descrizione, p. e. il positivo, sia λ_p il lato di R_o consecutivo di A_{p-1}, $\lambda_{p+n} \equiv \lambda'_p$ il lato coniugato, A_{p+n} il vertice consecutivo di λ_{p+n}, sarà A_{p+n} coniugato di A_{p-1} in f_p: sia λ_{p+n+1} il lato consecutivo di A_{p+n}, $\lambda'_{p+n+1} \equiv \lambda_{p+2n+1}$ il coniugato, A_{p+2n+1} il vertice consecutivo, A_{p+n2+1} corrisponderà ad A_{p+n} mediante la

f_{p+n+1} e ad A_{p-1} mediante la $f_{p+n+1} \cdot f_{p+n}$ ecc. Così proseguendo si otterrà una successione di vertici appartenenti ad uno stesso ciclo e due vertici consecutivi sono l'uno l'origine l'altro il termine di due lati coniugati descritti nel senso positivo. È chiaro intanto che, perchè possa proseguirsi questo processo, deve ogni lato consecutivo di un vertice avere il suo coniugato e però deve essere della 1ª specie: se si arriva ad un vertice il cui lato consecutivo è di 2ª specie cioè un arco di assoluto il procedimento è arrestato; e chiaro poi che muovendosi su R_o a partire da A_{p-1} nel senso negativo si possa procedendo in questo senso applicare il processo precedente, con le limitazioni sopradette.

Ciò posto i poligoni generatori R_o dànno luogo a tre categorie di cicli.

a) Sia in primo luogo un vertice della 1ª categoria cioè appartenente alla regione propria, i vertici corrispondenti saranno tutte della 1ª categoria, i lati che comprendono ciascuno di questi vertici sono della 1ª specie. Segue che partendo dal vertice A_{p-1} nel senso positivo del contorno di R_o e applicando il procedimento precedente si ha la successione di elementi (lati, vertici):

$$A_{p-1},\ \lambda_p,\ \lambda_{p+n},\ A_{p+n},\ \lambda_{p+n+1},\ \lambda_{p+2n+1},\ A_{p+2n+1},\ \lambda_{p+2n+2},\ \lambda_{p+3n+2},\ A_{p+3n+2},\ldots\ldots A_{p+in+i-1},\ \lambda_{p+in+i},\ \lambda_{p+(i+1)n+i},\ A_{p+(i+1)n+i}\ldots$$

Ora questa operazione può essere proseguita senza limiti, ma siccome i vertici di 1ª specie di R_o sono in numero finito si deve di necessità pervenire ad uno dei vertici precedenti, e di necessità il primo vertice della successione che coincide con uno dei precedenti è A_{p-1} perchè il ciclo può essere in tal caso cominciato da uno qualsivoglia dei suoi elementi. Di qui segue che partendo da un vertice di 1ª categoria *in un dato senso* applicando il procedimento precedente si ottiene la successiva chiusa di elementi:

$$(*)\quad A_{p-1},\ \lambda_p,\ \lambda_{p+n},\ A_{p+n},\ \lambda_{p+n+1},\ \lambda_{p+2n+1},\ A_{p+2n+1},\ \lambda_{p+2n+2},\ \lambda_{p+3n+2},\ A_{p+3n+2},\ldots\ A_{p+in+i-1},\ \lambda_{p+in+i},\ \lambda_{p+(i+1)n+i},\ A_{p-1}$$

ove $A_{p+(i+1)n+i} \equiv A_{p-1}$ e il ciclo ha $i+1$ vertici, lo indicheremo così:

$$(A_{p-1}\,,\ A_{p+n}\,,\ A_{p+2n+1}\,,\ A_{p+3n+2}\,, \dots\ A_{p+in+i-1})$$

Procedendo nel senso inverso si avrebbe:

$$(A_{p-1}\,,\ A_{p+in+i-1}\,, \dots\ A_{p+3n+2}\,,\ A_{p+2n+1}\,,\ A_{p+n})$$

Un siffatto ciclo si dice della 1ª *categoria*.

b) Il ciclo è formato di tutti vertici di 2ª categoria; in tal caso è chiuso. Difatti un vertice di 2ª categoria è compreso fra due lati di 1ª specie, e siccome tutti i vertici del ciclo sono, per ipotesi, di 2ª categoria, applicando il processo precedente in un dato senso si ottengono come lati consecutivi dei vertici corrispondenti, lati di 1ª specie e il procedimento precedente si può applicare indefinitamente come nel caso superiore e siccome i vertici di 2ª categoria sono in numero finito, siamo nelle stesse condizioni di prima; e partendo da un vertice B_{q-1} di 2ª categoria si avrà il ciclo chiuso:

$$(B_{q-1}\,,\ B_{q+n}\,,\ B_{q+2n+1}\,,\ B_{q+3n+2}\,, \dots\ B_{q+jn+j-1})$$

c) Il ciclo contiene vertici di 2ª e 3ª categoria: In tal caso il ciclo si dice di *3ª categoria*. esso è aperto: difatti uno dei due lati che comprendono un vertice di 3ª categoria appartiene all'assoluto e però non ha coniugato. Sia dunque C_{r-1} un vertice del ciclo e applichiamo l'operazione precedente nel senso positivo, se il 1° vertice di 3ª categoria al quale si giunge è C_m di 2ª specie il processo è arrestato.

Si ha: $C_{r-1},\ \lambda_r,\ \lambda_{r+n},\ C_{r+n},\ \lambda_{r+n+1},\ \lambda_{r+2n+1},\ C_{r+2n+1},\ C_m.$

Se C_{r-1} è di 2ª categoria, possiamo applicare nel senso inverso partendo da C_{r-1} il procedimento precedente e ci arresteremo al 1° vertice $C_{-m'}$ di 3ª categoria al quale si giunge; si avrà:

$$C_{r-1}\,,\ \lambda_{r-1}\,,\ \lambda_{r+n-1}\,,\ C_{r+n-1}\,,\ \lambda_{r+n-2}\,, \dots\ C_{-m'}\,.$$

Il ciclo è dunque aperto e i due vertici d'arresto sono $C_{-m'}$, C_m di 3ª categoria; tutti gli altri sono di 2ª categoria.

30. Ciò posto supponiamo che R_o abbia un ciclo di 1ª categoria. Se rappresentiamo i vertici di un ciclo, per più semplicità con $(A^{(o)}, A', A'', \ldots A^{(m-1)})$ avremo:

$$A^{(o)} \equiv A^{(m)},\ A' \equiv A^{(m+1)};\quad A^{(h)} \equiv A^{(k)},\ h \equiv k\,(m).$$

Sia f_k la sostituzione del gruppo di esponente minimo, che fa corrispondere ad $A^{(o)}$, $A^{(k)}$, la quale si deduce facilmente dalla successione (*), f_k^{-1} trasforma $A^{(k)}$ in $A^{(o)}$ e però R_o in $R_k \equiv f_k^{-1}.\, R_o$ il cui vertice $A_k^{(k)}$ è corrispondente al vertice $A^{(k)}$ di R_o e coincide con $A^{(o)}$; $A_k^{(k)} \equiv A^{(o)}$ e ai due lati che comprendono $A^{(k)}$ in R_o cioè λ_{k-1}, λ_k sono corrispondenti in f_k^{-1} i lati $\lambda_{k-1}^{(k)}$, $\lambda_k^{(k)}$ di R_k che comprendono $A^{(o)} \equiv A_k^{(k)}$ in R_k. Ora tutti i poligoni come R_k che corrispondono ad R_o e hanno un vertice comune con esso, ricoprono intorno a questo vertice l'intero giro una sola volta. Intanto ad ogni sostituzione f_k che cambia $A^{(o)}$ in $A^{(k)}$ corrisponde uno di questi poligoni $R_k \equiv f_k^{-1}.\, R_o$, ed è chiaro Inoltre che date due sostituzioni f_k, f_h $k \not\equiv h$ (m) e che perciò fanno corrispondere ad A_o due vertici diversi del ciclo, i poligoni $R_h \equiv f_h^{-1} R_o$, $R_k \equiv f_k^{-1} R_o$ corrispondenti non possono coincidere perchè i vertici $A_h^{(h)}$, $A^{(k)}$ corrispondendo a due vertici A_h, A_k di R_o non sono compresi fra coppie di lati congruenti ed inoltre gli angoli $\hat{A}_h^{(h)}$, $\hat{A}_k^{(k)}$ saranno in generale disuguali e d'altronde non si possono in *parte* ricoprire perchè il gruppo è propriamente discontinuo: Se invece f_h, f_k sono tali che $h \equiv k$ (n) cioè fanno corrispondere ad $A^{(o)}$ uno stesso vertice, i poligoni R_h. R_k possono essere distinti ovvero anche coincidenti e si ha in ogni caso $\hat{A}_h^{(h)} \equiv \hat{A}_k^{(k)}$. Consideriamo due sostituzioni consecutive f_k, f_{k+1} che fanno corrispondere ad $A^{(o)}$, $A^{(k)}$ e $A^{(k+1)}$, si ha applicando il solito processo: $A^{(k)}\ \lambda_k$, λ'_k $A^{(k+1)}$ e la sostituzione che trasforma $A^{(k)}$ in $A^{(k+1)}$ è fondamentale e sia $f'(z)$. Si ha: $f_{k+1} \equiv f'.\, f_k$ e però $f_{k+1}^{-1} \equiv f_k^{-1}.\, f'^{-1}$. Sia al solito (**) $R_k \equiv f_k^{-1} R_o$, $R_{k+1} \equiv f_{k+1}^{-1} R_o$; se f'^{-1} trasforma λ'_k in λ_k in R_o e se in R_k, $(\lambda_k^{(k)})'$, $\lambda_k^{(k)}$ sono i lati rispettivamente corrispondenti dei precedenti essi sono coniugati nella

sostituzione: $f'^{-1}_k \equiv f^{-1}_k \cdot f'^{-1} f_k$ e si ha: (***) $R'_k \equiv f'^{-1}_k R_k$ essendo R'_k adiacente a R_k lungo $\lambda^{(k)}_k$ e per le (**) (***) si ha $R'_k \equiv f'^{-1}_k R_k \equiv f^{-1}_k \cdot f^{-1}_k R_o \equiv f^{-1}_k \cdot f'^{-1} f_k . f_k^{-1} R_o \equiv$ $f^{-1}_k \cdot f'^{-1} R_o \equiv f^{-1}_{k+1} R_o \equiv R_{k+1}$ cioè i poligoni dedotti da R_o mediante f^{-1}_k, f^{-1}_{k+1} sono adiacenti. Così si ha una successione di poligoni che hanno il vertice in comune in A_o e ricoprono intorno ad A_o una volta la forma di 2ª specie. Siccome gli angoli che hanno i vertici in elementi della regione propria e non sull'assoluto e lati distinti non sono nulli essi hanno un rapporto finito con 2π. Di qui segue che il numero di questi poligoni R_k corrispondenti di R_o è finito e però vi sarà un ultimo poligono R_{q-1} che ha un lato coincidente con un lato di R_o per $A^{(o)}$; sia $R_{q-1} \equiv f^{-1}_{q-1}(z) . R_o$; f_{q-1} trasforma $A^{(o)}$ in $A^{(q-1)}$; allora $R_q \equiv f^{-1}_q R_o$ è adiacente nel dato verso con R_{q-1} e però $R_q \equiv R_o$ quindi f_q trasforma $A^{(o)}$ in se stesso è però $q = p . m$. Se $\widehat{A}^{(o)}, \widehat{A}'_1, \dots \widehat{A}^{(q-1)}_{q-1}$ sono gli angli in $A^{(o)}$ dei poligoni R_o, $R_1, \dots R_{q-1}$ avremo:

$$\text{(I)} \qquad \widehat{A}^{(o)} + \widehat{A}'_1 + \qquad\qquad + \widehat{A}^{(q-1)}_{q-1} = 2\pi$$

Ora $\widehat{A}'_1 \equiv \widehat{A}'$, $\widehat{A}''_2 \equiv \widehat{A}''$, $\dots A^{(q-1)}_{q-1} \equiv A^{(m-1)}_{\dots}$ ed essendo $q =$ $= p . m$ si vede che se $k < m$ e $R_k \equiv f^{-1}_k R_o$ si ha $R_{k+im} \equiv$ $f^{-1}_{k+im} R_o$ $(i = o, 1, 2, \dots . p-1)$ mentre f_k, $f_{k+m}, \dots .$ $f_{k+(p-1)m}$ fanno corrispondere ad $A^{(o)}$ l'unito vertice $A^{(k)}$ e però avremo:

$$\text{(II)} \ \widehat{A}^{(k)}_k \equiv \widehat{A}^{(k+m)}_{k+m} \equiv \widehat{A}^{(k+2m)}_{k+2m} \equiv \qquad\qquad \equiv \widehat{A}^{(k+(p-1)m)}_{k+(p-1)m} \equiv \widehat{A}^{(k)}$$

ove $k = o, 1, 2, \dots m-1$; se però i e j sono due valori minori di $p-1$, avremo:

$$\widehat{A}^{(in)}_{in} + \widehat{A}^{(1+in)}_{1+in} + \dots . + \widehat{A}^{n-1+in}_{n-1+in}$$

$$\equiv \widehat{A}^{(jn)}_{jn} + \widehat{A}^{(1+jn)}_{1+jn} + \dots . + \widehat{A}^{(n-1+in)}_{n-1+jn}$$

e però per $i = o$

$$A_o^{(o)} + A_1^{(1)} + \dots + A_{m-1}^{(m-1)} = \frac{2\pi}{p}$$

E infine per le (I) se $\hat{A}^{(o)}, \hat{A}', \dots \hat{A}^{(m-1)}$ sono gli angoli corrispondenti ai vertici del ciclo; si ha:

$$\text{(III)} \qquad \hat{A}^{(o)} + \hat{A}^{(1)} + \dots + \hat{A}^{(m-1)} = \frac{2\pi}{p}$$

Si ha quindi la proprietà fondamentale:

« La somma degli angoli dei vertici di un ciclo di 1ª categoria è una parte aliquota di 2π ».

Se ora A_o è un vertice del ciclo e $f_1, f_2, \dots f_m$ le sostituzioni di minimo esponente del ciclo e $R_1 \equiv f_1^{-1} R_o \dots$ $R_m \equiv f_m^{-1} R_o$, in R_k al vertice $A^{(k)}$ di R_o corrisponde il vertice $A_k^{(k)} \equiv A^{(o)}$; e poichè $A^{(m)} \equiv A^{(o)}$ la f_m^{-1} che trasforma R_o in R_m lascia invariato $A^{(o)}$, quindi f_m^{-1} e però f_m è una rotazione intorno ad $A^{(o)}$, mediante essa si passa da R_o a R_m e per la (III) l'ampiezza della rotazione è $\frac{2\pi}{p}$ essa è quindi rappresentata da una sostituzione per la quale $k = e^{\frac{2i\pi}{p}}$. Quindi ogni vertice del cicto $(A^{(o)}, \dots A^{(m-1)})$ è centro di una rotazione del gruppo di ampiezza $\frac{2\pi}{p}$ se tale è la somma degli angoli del ciclo.

31. Consideriamo un ciclo $(B^{(o)}, B', \dots B^{(m)})$ di 2ª categoria; i vertici $B^{(i)}$ sono sull'assoluto; se f_{i+km} è una sostituzione, ottenuta col solito processo, la quale trasforma B_o in B_i $(i < m)$, f_{i+km}^{-1} trasforma R_o in un poligono R_{i+km} il cui vertice $B_{i+km}^{(i+km)}$ corrispondente di B_i coincide $B^{(o)}$. Come per i cicli di 1ª specie si dimostra che se f_i, f_{i+1} sono due trasformazioni consecutive nel ciclo, $R_i = f_i^{-1}. R_o$, $R_{i+1} = f_{i+1}^{-1}. R_o$ sono due poligoni adiacenti e consecutivi nel verso di rotazione intorno a $B_,^{(o)}$ i poligoni si succedono in un determinato senso, e sono tutti con-

tenuti nell'angolo (nullo) che ha per lati; il lato di R_o al quale è adiacente R_1, e la tangente all'assoluto in $B^{(o)}$; questa tangente t, con i due lati di R_o uscenti da $B^{(o)}$ forma anzi due angoli, in ciascuno di questi angoli si ha una successione d'infiniti poligoni R_i corrispondenti di R_o mediante le sostituzioni f_i che si ottengono percorrendo su R_o il ciclo in un senso e nell'opposto; in altri termini si ha intorno a B_o una successione d'infiniti poligoni tutti contenuti nella regione propria. La sostituzione f_m^{-1} che trasforma R_o in R_m, è tale che in R_o f_m trasforma $B^{(o)}$ in se stesso e però il movimento corrispondente ha $B^{(o)}$ per elemento doppio, esso è però una rotazione di 2ª specie (movimento iperbolico) o una traslazione (parabolica). Nel II° caso la successione dei poligoni R_i, ricopre tutta la regione propria intorno a $B^{(o)}$ centro della sostituzione parabolica e però ogni archetto che sia tutto contenuto nella regione propria attraversa un numero finito di poligoni R_i; nel 2° caso se f'_m, f''_m sono, corrispondentemente ai due versi del ciclo, le sostituzioni che fanno corrispondere a $B^{(o)}$, $B^{(m)}$, le rotazioni f'^{-1}_m, f''^{-1}_m di 2ª specie determinano sull'assoluto, due proiettività iperboliche di cui un elemento unito comune è $B^{(o)}$ e gli altri elementi uniti siano $C^{(o)}$ per la 1ª, $D^{(o)}$ per la 2ª; ora le due forme $h_1 \equiv (B^{(o)}, C^{(o)})$ $h_2 \equiv (B^{(o)}, D^{(o)})$ comprendono un angolo (nullo), $\widehat{h_1 h_2}$ e la successione dei poligoni è evidentemente tutta contenuta in quest'angolo; quindi in tal caso un archetto della regione propria che non incontri i lati dell'angolo attraversa un numero finito di poligoni R_i, ne attraverso un numero infinito se un suo punto è sopra un lato di detto angolo. Nelle regioni poi, limitate dei lati $h_1 h_2$ e da archi di assoluto, non si hanno poligoni del gruppo. Dunque: « Ogni vertice di un ciclo chiuso di 2ª categoria è *elemento unito* di una rotazione di 2ª specie o di una traslazione ».

Ora il ripartirsi dei vertici di R_o in cicli dipende, come si è visto, dall'essere, i lati di 1ª specie ripartiti in coppie di lati coniugati, ma l'essere il gruppo discontinuo propriamente importa nei cicli di 1ª categoria l'ulteriore condizione che le somme degli angoli di un medesimo ciclo, sia una parte aliquota di 2π. Ora importa osservare che viceversa « dato un poligono R_o nel quale vi siano eventualmente lati di 2ª specie, e i lati di

1ª specie siano ripartiti in coppie di lati coniugati, e i cicli di 1ª categoria, se ve ne sono, soddisfino alla precedente condizione; questo poligono R_o genera un gruppo, propriamente discontinuo ».

32. Supponiamo dato R_o e su di esso la ripartizione dei suoi lati in coppie di lati coniugati; il corrispondente gruppo G è individuato, perchè sono individuate le sostituzioni fondamentali che trasformano un lato nel coniugato. Siano f', f'', ... $f^{(n)}$ queste sostituzioni fondamentali e λ_i, λ_{i+n} una coppia di lati coniugati trasformati l'uno nell'altro mediante la $f^{(i)}$. Applicando ad R_o le $f^{(i)}$ si costruiscono i poligoni limitrofi di R_o, e se R_h è uno di essi le sostituzioni fondamentali rispetto a R_h sono $f_h^{(i)} \equiv f^{(h)} f^{(i)} f_h^{(h)-1}$ applicando ad R_h le $f_h^{(i)}$ si ottengono i poligoni limitrofi ad R_h ecc.... Veniamo così a costruire nella regione propria una rete di poligoni congruenti di R_o due a due adiacenti lungo un lato di 1ª specie. Ma finchè ci limitiamo a supporre *soltanto* che i lati di R_o si associno in coppie di lati coniugati, due ipotesi possono farsi:

a) O i poligoni così costruiti ricoprono tutta la regione propria o una sua parte *interamente* e una *sola volta* in modo che due poligoni non hanno altri elementi in comune all'infuori, al più, di un lato di 1ª sorte di confine: in lal caso il gruppo generato da R_o è *propriamente discontinuo.*

b) O i poligoni così costruiti possono avere porzioni in comune, in modo di ricoprire la regione propria o una sua parte più volte o anche infinite volte e in tal caso il gruppo determinato da R_o non è propriamente discontinuo ma contiene trasformazioni infinitesime.

Perciò supponiamo che i cicli di 1ª specie soddisfino alle condizioni precedenti; allora se $(A^{(o)}, A^{(1)}, A^{(m+1)})$ è uno di siffatti cicli e f_i è la sostituzione dedotta secondo il procedimento del numero precedente, dalle sostituzioni fondamentali, la quale faccia corrispondere ad $A^{(o)}$ il vertice $A^{(r)}$ ove $r < n$ e $r \equiv i \ (m)$; e si vedrebbe, ripetendo le considerazioni del n.° precedente, che i poligoni $R_i \equiv f_i^{-1} R_o$ formano una successione che ricopre l'intero giro intorno ad $A^{(o)}$ e due poligoni R_i, R_{i+1} dedotti da R_o me-

diante le due sostituzioni successive del ciclo, f_i^{-1}, f_{i+1}^{-1}, sono adiacenti, e inoltre $R_q \equiv f_q^{-1} . R \equiv R^o$ per $q = pm$, essendo la somma degli angoli del ciclo $\frac{2\pi}{p}$.

La sostituzione f_m trasforma $A^{(o)}$ in $A^{(o)}$ e però è una rotazione intorno ad $A^{(o)}$, la cui ampiezza è appunto $\frac{2\pi}{p}$. Quindi possiamo dire che intorno ad ogni vertice di 1ª specie di R_o (e quindi di R_i) appartenente ad un ciclo di m vertici e di ampiezza $\frac{2\pi}{p}$ si dispongono $mp = q$ poligoni R i quali ricoprono completamente la regione senza sovrapposizioni. Se poi il vertice è della 2ª specie e il ciclo corrispondente di 2ª categoria, valgono anche le stesse considerazioni fatte nel numero precedente. Ora vogliamo dimostrare, che se A è un elemento di R_o e B un altro elemento appartenente alla regione contenente poligoni R, un arco che congiunge A con B attraversa un numero finito di poligoni R; cioè partendo da R_o e procedendo lungo l'arco (AB) come nel n.° 28 s'incontra una successione di poligoni finita R_o, R_{β_1}, R_{β_2}, ... R_{β_ν} i quali sono due a due adiacenti e tali che R_{β_ν} contiene B. Ora ogni poligono della successione R_o, R_{β_1}, ... stacca sull'arco $(A_1 B_1)$ un arco parziale L_{β_r} il quale ha gli estremi sui lati ove R_{β_r} è adiacente al precedente poligono $R_{\beta_{r-1}}$ e al seguente $R_{\beta_{r+1}}$; Siano $\lambda_{\alpha_{r-1}}^{(\beta_r - 1)}$ $\lambda_{\alpha_r}^{(\beta_r)}$ questi lati sui quali insistono gli estremi di L_{β_r}; in tutti i poligoni della successione: (*) R_o, R_{β_1}, ... R_{β_r} ... nei quali questi lati non sono consecutivi la lunghezza $|L_{\beta_r}|$ dell'arco L_{β_r} corrispondente non può scendere evidentemente al disotto di una lunghezza fissa Λ; $|L_{\beta_r}| \geq \Lambda$ e siccome l'arco (A, B) è tutto contenuto nella regione propria e nessun suo elemento è

sull'assoluto; la sua lunghezza:

$$|L| = \int_A^B \frac{1}{y} \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2} =$$

$$+ \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{y} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, ds \qquad (x = x(s),\ y = y(s))$$

è finita e però se n è tale che $n\,|\Lambda| > |L|$, vi sono nella successione (*) al più n poligoni che soddisfano alla condizione precedente; sia m il loro numero; avremo su (A, B) m archi successivi (ma in generale non tutti consecutivi) ognuno dei quali insiste su due lati non adiacente del poligono al quale appartiene; sia L_{β_h} l'ultimo di essi; per $s \gtrless h$ gli archi L_{β_s} hanno gli estremi su due lati consecutivi di R_{β_s} cioè in ognuno di questi poligoni sottendono un vertice; ora se consideriamo due poligoni successivi, R_{β_s}, $R_{\beta_{s+1}}$ l'arco (A, B) per passare dall'uno all'altro attraversa il lato $\lambda_{\alpha_s}^{(\beta_s)}$ del 1°; ora può darsi che i due tratti L_{β_s}, $L_{\beta_{s+1}}$ sottendano due vertici diversi, ovvero il medesimo vertice comune a L_{β_s}, $L_{\beta_{s+1}}$ che é uno dei due situati su $\lambda_{\alpha_s}^{(\beta_s)}$; nel 1° caso la lunghezza dell'arco $\left|L_{\beta_s} + L_{\beta_{s+1}}\right|$ non può essere inferiore ad una lunghezza data $|\Lambda|$ e quindi siamo nel caso precedente e di siffatti archi non ce ne può essere che un numero finito; infine può avvenire che a partire da uno degli archi L_{β_s} tutti i successivi si avvolgono attorno ad un elemento vertice comune di tutti i successivi poligoni incontrati da (A, B). Ora o il vertice è di 1ª specie e i poligoni che può incontrare successivamente (A, B) sono in numero limitato ed è quindi limitato il numero degli archi L_{β_s} e poichè (A, B) è di lunghezza finita e fa quindi un numero limitato di giri intorno a detto vertice, segue che dopo aver attraversato un numero finito di poligoni si deve pervenire all'estremo B che sarà situato in uno di questi poligoni. Se poi il vertice è

di 2ª specie sull'assoluto, (A , B) non può girare completamente intorno ad esso, anzi siccome deve rimanere *tutto* nella regione occupata da poligoni nessun suo elemento può avere sull'assoluto se appartiene a un ciclo parabolico, o su una delle due forme limiti di 1ª specie uscenti da detto vertice se appartiene a un ciclo iperbolico, quindi la successione degli archi L_{β_s} che sottendono il vertice in questione per quello che si è detto sopra è in numero finito. Quindi la proposizione precedente è completamente dimostrata. In particolare un contorno chiuso che giaccia tutto nella regione occupata dai poligoni R attraversa un numero finito di poligoni.

Siano dunque due elementi A in R_o e B nella regione di piano occupata dai poligoni; congiungiamo A con B con un arco della specie precedente (A , B); esso incontrerà successivamente i poligoni R_o R_{α_1} $R_{\beta_2} \ldots R_{\beta_\nu}$ e l'ultimo contiene B; supponiamo di tracciare fra A e B un altro arco (A , B)′ anche della stessa specie precedente esso incontrerà la successione di poligoni R_o , $R_{\alpha'_1}$, $R_{\beta'_2}, \ldots R_{\beta'_\mu}$; e B è situato in $B_{\beta'_\mu}$ ora o $R_{\beta_\nu} \equiv R_{\beta'_\mu}$ e il gruppo è propriamente discontinuo, o $R_{\beta_\nu} \not\equiv R_{\beta'_\mu}$ e il gruppo conterrebbe delle trasformazioni infinitesime perchè i due poligoni R_{β_ν} , $R_{\beta'_\mu}$ avrebbero l'elemento B e quindi una porzione in comune. Si ha dunque il seguente criterio per vedere se il gruppo generato da R_o è propriamente discontinuo: Si prende un elemento A in R_o e un altro elemento B situato nella regione dei poligoni R_o; si unisce A con B con due archi qualsivogliano (A , B); (A , B)′ purchè contenuti nella regione occupata dagli R; seguendo ciascun arco le due successioni di poligoni attraversate dai medesimi devono condurre allo stesso poligono contenente B; questo criterio può essere modificato; ricordando quanto si è detto al n.° 28, seguendo l'arco (A , B) che incontra la successione di poligoni R_o, R_{α_1}, $R_{\beta_2}, \ldots R_{\beta_\nu}$ ad esso corrisponde la successione di sostituzioni $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}^{(\alpha_1)}, \ldots f_{\alpha_r}^{(\beta_\nu - 1}$ essendo $R_{\beta_s} = f_{\alpha_\nu}^{(\beta_s - 1)} R_{\beta_{s-1}}$; e la sostituzione che trasforma R_o in R_{β_ν} è $f_{\beta_\nu} = f_{\alpha_\nu}^{(\beta_\nu - 1)} \ldots f_{\alpha_2}^{(\alpha_1)} f_{\alpha_1}$, e la condizione prece-

dente si riduce a questa: andando lungo l'arco $(A, B)'$ che incontra l'altra successione di poligoni $R_{\alpha'_1}$, $R_{\beta'_2}$, ... $R_{\beta'_\mu}$ e ai quali dànno luogo all'altra successione di sostituzioni $f_{\alpha'_1}$, $f_{\alpha'_2}^{(\alpha'_1)}$, ... $f_{\alpha'_\mu}^{(\beta'_\mu - 1)}$ si deve avere $f_{\beta_\nu} = f_{\alpha'_\mu}^{(\beta'_\mu - 1)} \ldots f_{\alpha'_2}^{(\alpha'_1)} f_{\alpha'_1}$ che è la sostituzione che fa corrispondere a R_o, R_{β_ν}. Se ora percorriamo il circuito chiuso $(A, B) + (B, A)'$ la condizione precedente si riduce alla: $f_{\alpha'_1}^{-1} f_{\alpha'_2}^{-1} \ldots f_{\alpha'_\mu}^{-1(\beta'_\mu - 1)} f_{\alpha_\nu}^{(\beta_\nu - 1)} f_{\alpha_{\nu-1}}^{(\beta_\nu - 2)} \ldots f_{\alpha_1} = 1$; Quindi se a partire da A costruiamo un contorno chiuso (A, M, A) supponendo su di esso stabilito un senso, esso contorno attraversa una serie di poligoni R_o, R_{α_1}, ... R_{β_ν} ove R_{β_ν} contiene A e la condizione necessaria e sufficiente perchè il gruppo sia propriamente discontinuo è che $R_o = R_{\beta_\nu}$ qualunque sia (A, M, A); possiamo più generalmente enunciare il seguente criterio equivalente al precedente. Supponiamo un circuito chiuso γ qualsiasi munito di senso che attraversi una catena di poligoni e dia luogo ad una successione di sostituzioni f_1, f_2, ... f_γ ... la condizione necessaria e sufficiente perchè il gruppo sia propriamente discontinuo è che questa successione di sostituzioni sia finita e si abbia:

$$f_\gamma \, f_{\gamma - 1} \ldots f_1 = 1$$

Ora se γ non avvolge nessun vertice, spezzandolo con due elementi M, N nei due (M, N) $(M, N)'$ questi due pezzi partendo p. e. da M e da un poligono R_μ che lo contiene incontrano la stessa successione di poligoni e attraversano i medesimi lati ed è evidente che giungono al medesimo poligono R_ν contenente N e però γ soddisfa identicamente alla (*). Ma ciò avviene anche se γ avvolge un vertice che sarà necessariamente di 1ª specie per la proprietà dei cicli di 1ª categoria; difatti se V è siffatto vertice, intorno a V non vi è che una semplice successione di un numero limitato di poligoni che ricoprono una volta e senza duplicature il giro; quindi il circuito γ dà evidentemente luogo ad una successione di sostituzioni il prodotto delle quale è una rotazione intorno a V di ampiezza 2π e però soddisfa alla (*).

Se ora γ racchiude più vertici vale la stessa proprietà; applichiamo il procedimento da m a $m+1$; sia M un elemento di γ situato in R_i e percorrendo una volta il circuito a partire da R_i, s'incontri la successione delle sostituzioni f_{i_1}, $f_{i_2}, \ldots f_{i_\nu}$; prendiamo due elementi C e D di γ e uniamoli con l'arco (CD), così spezzeremo il circuito γ ne due archi γ' contenente M e γ'' e avremo i due circuiti chiusi $\gamma' + (C, D)$; $\gamma'' + (D, C)$. Supponiamo che nella successione dei poligoni corrispondenti alla successione delle sostituzioni precedenti siamo R_c, R_d quelli contenenti C, D e sia f_c^d la sostituzione a cui dà luogo l'arco (C, D) partendo da R_c e che muta R_c in R'_d; l'arco (D, C) partendo da R'_d dà luogo alla $f_d^c = (f_c^d)^{-1}$ e che muta R'_d in R_c; siano poi:

f_i^c la sostituzione risultante a cui dà luogo l'arco (M, C), a partire da R_i, e che muta R_i in R_c.

$f_{\gamma''}$ la sostituzione risultante a cui dà luogo l'arco γ'' a partire da R_c, e che muta R_c in R_d.

f_d^i la sostituzione risultante a cui dà luogo l'arco (D, M) a partire da R_d e che trasforma R_d in R'_i.

Avremo:

$$f_{i_\nu} \ldots . f_{i_2} \cdot f_{i_1} = f_d^i \cdot f_{\gamma''} f_i^c$$

Ora se γ contiene $m+1$ vertici supponiamo che il circuito $\gamma' + (C, D)$ ne contenga 1 e $\gamma'' + (D, C)$, m; ora questo ultimo circuito a partire da R'_d dà luogo alla successione di sostituzioni f_d^c e $f_{\gamma''}$ quindi per le ipotesi fatte

$$f_{\gamma''} f_d^c = 1$$

e però $R'_d = R_d$; quindi f_c^d trasforma R_c in R_d e il circuito $\gamma' + (C, D)$ darà luogo alla relazione:

$$f_d^i \cdot f_c^d \cdot f_i^c = 1$$

ora possiamo scrivere:

$$f_{i_\nu} \ldots f_{i_1} \cdot f_{i_1} = f_a^i \cdot f_{\gamma''} \cdot f_a^c \cdot f_c^d \cdot f_i^c = f_d^i \cdot f_c^d \cdot f_i^c = 1$$

è quindi soddisfatta la condizione (*) e $R'_i = R_i$.

È così dimostrato che se R_o soddisfa alle precedenti condizioni sui lati e su i cicli il gruppo generato è propriamente discontinuo.

Possiamo ora meglio precisare il teorema relativo alle relazioni fra le sostituzioni fondamentali; siano $(A^{(o)}\, A'\, A'', \dots A^{(m-1)}$ m vertici di un ciclo di 1ª categoria e di ampiezza $\frac{2\pi}{p}$ e siano $f'\, f'' \dots f^{(m)}$ le sostituzioni fondamentali del gruppo che trasformano $A^{(o)}$ in A'; A' in A'', ... $A^{(m-1)}$ in $A^{(m)} \equiv A^{(o)}$; si è visto che la $f^{(m)}\, f^{(m-1)} \dots f'$ è una relazione di vertice $A^{(o)}$, di ampiezza $\frac{2\pi}{p}$, quindi si ha la relazione:

$$[f^{(m)}\, f^{(m-1)} \dots f']^p = 1 \tag{1}$$

Ora se si fosse considerato il vertice $A^{(i-1)}$ del ciclo si sarebbe avuta la rotazione: $f^{(i-1)}\, f'\, f^{(m)}\, f^{(i)}$ di centro A_{i-1} e di ampiezza $\frac{2\pi}{p}$ e però si avrebbe la relazione

$$[f^{(i-1)}\, f^{(i-2)} \dots f^{(i)}]^p = 1 \tag{2}$$

ora la (2) non è distinta dalla (1); difatti dalla (2) si ha:

$$\left[f^{(i-1)}\, f^{(i-2)} \dots f'\, f^{(m)} \dots f^{(i)}\right]^p \cdot \left[f^{(i)^{-1}}\, f^{(i+1)^{-1}} \dots f^{(m)^{-1}}\right]^p =$$

$$= \left[f^{(i)^{-1}} \dots f^{(m)^{-1}}\right]^p$$

ovvero:

$$\left[f^{(i-1)} \cdot f^{(i-2)} \dots f'\right]^p = \left[f^{(i)^{-1}} \dots f^{(m)^{-1}}\right]^p$$

e ancora:

$$\left[f^{(m)}\, f^{(m-1)} \dots f'\right]^p = \left[f^{(m)} \dots f^{(i)}\right]^p \cdot \left[f^{(i)^{-1}} \dots f^{(m)^{-1}}\right]^p = 1$$

Si ha dunque:

« Il numero di relazioni fondamentali che esistono fra le sostituzioni fondamentali di un gruppo discontinuo di movimenti è uguale al numero dei cicli di 1ª categoria del poligono R_o che lo genera ».

33. Supponiamo ora dato nella forma di 2ª specie un poligono R_o con tutti i vertici di 1ª specie e abbia $2n$ lati a due a due coniugati e μ cicli, e immaginiamo staccato R_o dalla forma alla quale appartiene e di deformarlo in modo da sovrapporre due lati coniugati e tutti i vertici appartenenti ad un medesimo ciclo. Si otterrà così una varietà chiusa W_o in corrispondenza con R_o la quale sarà in generale a *connessione multipla* mentre R_o la supponiamo semplicemente connessa. Gli elementi di R_o e della varietà W_o sono in corrispondenza biunivoca eccetto:

1° Una sezione di diramazione tracciata su W_o a ogni elemento della quale corrispondono due elementi coniugati del contorno di R_o.

2° μ elementi eccezionali, situati sulla sezione di diramazione e tali che ad ognuno di essi corrispondono tutti i vertici di R_o appartenenti ad un ciclo: La detta sezione è divisa dai μ elementi eccezionali in n pezzi o lati ciascuno dei quali corrisponde ad una coppia di lati coniugati di R_o, essa poi è il limite o contorno di una faccia semplicemente connessa come R_o. Abbiamo dunque sulla varietà chiusa W_o: μ vertici, n lati, 1 faccia semplicemente connessa, se quindi $p+1$ $(p \gtreqless o)$ è l'ordine di connessione per un noto teorema di Eulero si ha

$$\mu + 1 - n = 2 - 2p; \qquad (*) \; p = \frac{n - \mu + 1}{2}$$

la (*) ove p è intero e positivo e almeno zero ci dice che $n \geq \mu - 1$ e che la differenza fra il numero delle sostituzioni fondamentali e il numero dei cicli è dispari in R_o. Il numero p viene chiamato anche *genere* del gruppo generato da R_o. Se poi $2\pi\alpha_i$ è la somma degli angoli di un ciclo $2\pi \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i$ ci dà la somma di tutte gli angoli di R_o la quale poichè la metrica è iperbolica, è minore di $2(n-1)\pi$ e però:

$$(**) \qquad \sum_{1}^{\mu} \alpha_i < n - 1$$

34. Le considerazioni precedenti si estendono anche ai gruppi discontinui di movimenti nella metrica Ellittica ed Euclidea; e troviamo con ragionamenti analoghi:

« La condizione necessaria e sufficiente perchè un poligono R_o generi un gruppo discontinuo privo di sostituzioni infinitesime è, che i lati (non appartenenti all'assoluto) si ripartiscano in coppie di lati coniugati, e i vertici (non appartenenti all'assoluto) in cicli tali che gli angoli di un ciclo abbiano per somma un sottomultiplo di 2π ».

Se poi R_o ha tutti i lati di 1ª specie come avverrà necessariamente nella metrica ellittica sta la formula (*) nel n° precedente in ogni caso e la (**) si modifica nelle seguenti

(***) $$\sum_1^{\mu} \alpha_i = n - 1 \text{ (caso Euclideo)}$$ (****) $$\sum_1^{\mu} \alpha_i > n - 1 \text{ (caso ellittico)}$$

Ora le (***) e le (****) limitano le varietà dei poligoni R_o e dei gruppi corrispondenti nelle due metriche: Euclidea ed Ellittica.

Consideriamo il caso 1° della metrica Euclidea, e il poligono fondamentale R_o generatore del gruppo propriamente discontinuo di movimenti abbia $2n$ lati di 1ª specie due a due coniugati e μ cicli. Supponiamo in primo luogo $\mu = 1$; tutti i vertici di R_o appartengano ad un sol ciclo e la somma degli angoli del medesimo sia $\frac{2\pi}{k}$; siccome questa somma coincide con la somma di tutti gli angoli del poligono, dovrebbe aversi per la (***)

$$\frac{1}{k} = n - 1$$

ed essendo k ed n interi e positivi $k = 1$ $n = 2$ la (*) poi dà $p = 1$. R_o è un quadrangolo con i lati opposti congruenti (paralleli); le sostituzioni fondamentali del gruppo sono le 2 traslazioni che trasformano ogni lato di R_o nel suo opposto, e si ha il gruppo discontinuo di movimenti generato da due traslazioni, gruppo che già abbiamo considerato. Se si hanno più cicli abbiamo le 2 relazioni:

(***) $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\mu = n - 1$ (*) $n = 2p + \mu - 1$

le α sono al più uguali ad 1 e però: $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\mu \overline{<} \mu$ e però $n - 1 \overline{<} \mu$ e per le (*)

$$2p + \mu - 1 \overline{<} \mu + 1 ; \qquad p \overline{<} 1 ; \qquad p = 1 , \qquad p = o$$

Il 1° caso $p = 1$ dà: $n = \mu + 1$ e però: $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\mu = \mu$ da cui $\alpha_1 = \alpha_2 = \quad = \alpha_\mu = 1$.

Tutti i cicli hanno per ampiezza 2π; li diremo cicli (1); cicli (2) gli altri. Ora dico che in generale non tutti i cicli (1) possono avere più di 2 vertici. Se ciò fosse si avrebbe $2n \overline{>} 3\mu$; $2n \overline{>} 3\,(n - 1)$ e però $n \overline{<} 3$ e poichè $n > 1$ per la (***) $n = 2$, $n = 3$. Il caso $n = 2$, $\mu = 1$ è quello trattato innanzi; il caso $n = 3$ dà un esagono con 2 cicli (1) di 3 vertici nel quale sono coniugati i lati opposti: ma questo caso non differisce dal precedente poichè se f_1 , f_2 , f_3 sono le 3 sostituzioni fondamentali esse sono legate dalla relazione: $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 = 1$ e però $f_1 = f_3^{-1} f_2^{-1}$ cioè il gruppo generato dall'esagono coincide con quello generato dalle due sostituzioni f_2 , f_3 e però il quadrilatero fondamentale dovendo essere di genere 1 ha i lati opposti coniugati e però è un parallelogramma. Se $n > 3$ si deve avere almeno 1 ciclo con 2 vertici. Siano A , A′ , i vertici λ_p , λ_q i lati adiacenti ad A , λ'_p , λ'_q i coniugati adiacenti ad A′; la solita regola A $\lambda_q \lambda'_q$ A′ $\lambda'_p \lambda_p$ A dà, che se f_p , f_q sono i due movimenti fondamentali individuati da λ_q , λ'_q; λ_p , λ'_p avremo $f_p \cdot f_q^{-1} = 1$ $f_p = f_q$ e però alle due coppie di lati λ_p, λ'_p; λ_q, λ'_q coniugati possiamo sostituire una sola coppia di lati; così procedendo si arriva al 1° caso tipico del parallelogramma.

Nel 2° caso si ha: $p = o$, (0) $n = \mu - 1$; $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\mu = \mu - 2$; se h cicli sono (1) si ha posto (I) $\mu - h = \nu > o$; (II) $\alpha_1 + \alpha_2 + \quad + \alpha_\nu = \nu - 2$; e poichè $\alpha_i \overline{<} \dfrac{1}{2} \, (i = 1, \ldots \nu)$

$$\frac{\nu}{2} \overline{>} \nu - 2 ; \quad \nu \overline{<} 4 \text{ e poichè per la (II) } \nu > 2 , \ \nu = 3 , \ \nu = 4.$$

Supponiamo $\nu = 3$; se gli h cicli (1) hanno almeno 3 vertici, poichè i 3 cicli (2) hanno almeno 1 vertice avremo $3h \overline{<} 2n - 3$; ma per le (I) e (0) $h + \nu = h + 3 = n + 1$ e però $3h \overline{<} 2\,(h + 2) - 3$; $h \overline{<} 1$ e però $h = o$, $h = 1$; nel 1° caso vi sono

dei cicli (1) che hanno due vertici e questi possiamo mandarli via; rimane il 2° caso, possibile quando il ciclo (1) ha 3 vertici e i 3 cicli (2), 1 vertice; si ha così un esagono e sono coniugati i lati consecutivi; se $\lambda_1 \lambda'_1$, λ_2, λ'_2, $\lambda_3 \lambda'_3$ sono i lati nell'ordine di un verso, e D, E, F i vertici compresi rispettivamente fra λ_1 e λ'_1; λ_2 e λ'_2, λ_3 e λ'_3 i 3 cicli (2) sono (D), (E), (F); Se A, B, C sono gli altri tre vertici si ha: $A \lambda_1 \lambda'_1$ $B \lambda_2 \lambda'_2$ $C \lambda_3 \lambda'_3$ A e però se $f_1 f_2 f_3$ sono le tre sostituzioni fondamentali si ha $f_3 = f_1^{-1} f_2^{-1}$ e il gruppo può essere generato dalle 2 sostituzioni f_1, f_2, il quadrilatero fondamentale di genere o ha 3 cicli e però due coppie di lati consecutivi sono coniugati e due cicli sono di 2 vertici un ciclo di 1 vertice. In quanto a questi cicli essi hanno le ampiezze legate dall'equazione

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

Una facile discussione porta a questi sistemi di valori per le α:

$$1^\circ \ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}; \qquad 2^\circ \ \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{4} \ ; \ \alpha_3 = \frac{1}{2}$$

$$3^\circ \ \alpha_1 = \frac{1}{2}, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{3}, \qquad \alpha_3 = \frac{1}{6}$$

Se $\nu = 4$ si ha $3h \lesseqgtr 2n - 4 \lesseqgtr 2(h+3) - 4$, $h \lesseqgtr 2$ e però $h = o$, $h = 1$, $h = 2$.

Il caso $h = 2$ dà 4 cicli (2) di 1 vertice e 2 cicli (1) di 3 vertici, caso impossibile se osserviamo che, perchè si abbia un ciclo di 1 vertice, i due lati adiacenti al vertice debbono essere coniugati. Il caso $h = 1$ da $\mu = h + \nu = 5$, $n = 4$ il poligono è un ottagono e si ha o un ciclo (1) di 4 vertici e 4 cicli (2) di un vertice; o un ciclo (1) di tre vertici e 4 cicli (2) dei quali, 3 di 1 vertice uno di 2 vertici. Nel 1° caso si vedrebbe che nell'ottagono ogni coppia di lati coniugati è formata di 2 lati consecutivi e se f_1, f_2, f_3, f_4 sono le 3 sostituzioni si ha $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 = 1$ e però possiamo sostituire all'ottagono come poligono fondamentale un esagono nel quale sono coniugati due lati opposti e due coppie di lati adiacenti; si hanno 4 cicli (2) due di un vertice due di 2 vertici. Il 2° caso è impossibile per

le stesse ragioni dette sopra; rimane $h = o$ in tal caso vi sono dei cicli (1) di 2 vertici i quali si possono sopprimere; in ogni caso ci riduciamo all'esagono precedente; l'equazione (II) diviene

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2$$

e però $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_3 - \alpha_4 = \frac{1}{2}$.

35. Nella metrica Ellittica non si hanno che poligoni R_o di 1ª specie; il gruppo generato da uno di questi poligoni ha come si è visto un numero limitato di movimenti. Le relazioni fondamentali qui sono

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \quad + \alpha_\mu > n - 1 \qquad n = \mu + 2p - 1$$

Perchè al solito $\alpha_i \overline{<} 1$ si ha $\mu > n - 1$; $p < 1$ e però $p = o$; (I) $n = \mu - 1$ e inoltre: $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\mu > \mu - 2$. Supponiamo al solito che vi siano h cicli (1) e poniamo $\mu - h = \nu$ avremo:

$$\text{(II)} \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \quad + \alpha_\nu > \nu - 2$$

ora poichè $\alpha_i < \frac{1}{2}$; si ha $\frac{\nu}{2} > \nu - 2$ e $\nu < 4$; $\nu \overline{<} 3$. Supponiamo al solito che gli h cicli (1) contengano almeno 3 vertici; dovremo avere: $3h \overline{<} 2(h + \nu - 1) - \nu$; $h \overline{<} \nu - 2$ e poichè per ipotesi $h \overline{>} 1$, sarà $\nu \overline{>} 3$ e però avremo $\nu = 3$ e $h = 1$ e il poligono ha 3 cicli (2) a un vertice e un ciclo (1) a 3 vertici ed è al solito un esagono nel quale sono coniugate le 3 coppie di lati consecutivi e, come si è visto nel caso precedente, possiamo sostituire un quadrangolo nel quale siano coniugate le due coppie di lati adiacenti. Se poi tutti i cicli (1) (meno uno al più) hanno due vertici possiamo farli sparire e quindi in ogni caso possiamo ridurci ad $h = o$ e però $\nu = \mu$ e quindi $\mu > 2$, $\mu < 4$; $\mu = 3$ e il poligono fondamentale è un quadrilatero a 3 cicli due di 1 vertice, uno di due vertici e sono coniugate le coppie di lati consecutivi; la (II) diviene

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > 1$$

Anche qui una facile discussione porta ai seguenti sistemi di

valori:

$$1^\circ \ \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{n}; \qquad 2^\circ \ \alpha_1 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2};$$

$$3^\circ \ \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{5}; \qquad 4^\circ \ \alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{4}$$

Ritroviamo così i gruppi di movimenti ellittici del n° 17.

36. Tornando alla metrica iperbolica veniamo a parlare delle simmetrie. Esse come si è visto nei n[i] 17° e 18° sono rappresentate da sostituzioni involutorie di 2ª specie o riflessioni.

Ora una sostituzione di 2ª specie è della forma

$$S; \quad (1) \quad z' = \frac{-az_o + b}{-cz_o + d} \quad (ad - bc = 1)$$

ove qui a, b, c, d sono reali; perché sia involutoria deve aversi $S^2 = 1$ da cui facilmente si deduce $a - d = o$. La (1) rappresenta un omografia sulla forma Π iperbolica che trasforma l'assoluto in se stesso, però non un movimento. Perciò basta osservare che la (1) si ottiene combinando un movimento con la sostituzione $z' = -z_o$, da cui (2) $x_1 = -x \quad y_1 = y$ e ricorrendo alle formule:

$$x = \frac{\xi}{1 - \eta} \qquad\qquad y^2 = \frac{1 - \xi^2 - \eta^2}{(1 - \eta)^2}$$

le (2) divengono:

$$(2) \qquad \xi' = -\xi, \qquad \eta' = \eta$$

cioè l'omografia (2) corrispondente in Π alle (2) è una simmetria ortogonale rispetto all'asse delle $\xi = o$ e però le (1) sono le risultanti di un movimento e di una simmetria rispetto all'asse della η.

Una riflessione:

$$(3) \qquad z' = \frac{-az_o + b}{-cz_o + a} \quad (a^2 - bc = 1)$$

rappresenta come sappiamo sulla forma iperbolica una simmetria il cui asse è dato dall'equazione:

$$czz_0 - a(z + z_0) + b = o$$

ovvero in coordinate ξ, μ

$$2a\xi + (b - c)\eta - (b + c) = o \tag{4}$$

e poichè $a^2 - bc = 1 > o$ detto asse penetra nella regione propria e quindi la (3) rappresenta una simmetria assiale. Una simmetria centrale è poi una rotazione di ampiezza π e come si vede facilmente può venire rappresentata da una relazione quale la (3) ove però $a^2 - bc = -1$.

37. Vi è un metodo algebrico per determinare la forma di tutte le trasformazioni lineari che servono a trasformare una quadratica in se stessa. Il metodo è valido per un numero qualsiasi di variabili: Sia la quadratica:

$$\varphi = \sum_{i\varkappa} a_{i\varkappa}\, x_i\, x_\varkappa \tag{1}$$

e poniamo

$$x_i = \omega\sigma_i + \vartheta\tau_i \qquad \xi_i = \omega\sigma_i - \vartheta\tau_i \tag{2}$$

ove:

$$\sigma_i = \sum_\varkappa \lambda_{i\varkappa}\, z_\varkappa \qquad \tau_i = \sum_\varkappa \mu_{i\varkappa}\, z_\varkappa \tag{3}$$

Supponiamo sostituite nelle (2) al posto delle σ_i, τ_i i valori dati dalle (3); avremo le x_i e ξ_i espresse linearmente mediante le z:

$$x_i = \sum_r h_r^{(i)}\, z_r \qquad \xi_i = \sum_r k_r^{(i)}\, z_r$$

Ricavando dalle 1^e le z e sostituendole nelle 2^e e viceversa, possiamo esprimere lineamente le x_i mediante le ξ_i e viceversa. Noi vogliamo che questa trasformazione sia tale che la quadratica (1) si trasformi in se stessa; cioè si abbia:

$$\sum_{i\varkappa} a_{i\varkappa}\, \xi_i\, \xi_k = \sum_{i\varkappa} a_{i\varkappa}\, x_i\, x_\varkappa \tag{5}$$

ciò che si può sempre scrivere trattandosi di variabili omogenee. Le formule di trasformazione delle ξ nelle x hanno n^2 coefficienti ma la (5) porta $\frac{n(n+1)}{2}$ condizioni, quindi in tutto rimangono arbitrarii $\frac{n(n-1)}{2}$ coefficienti, cioè i coefficienti della trasformazione si potranno esprimere mediante $\frac{n(n-1)}{2}$ costanti arbitrarie.

Sostituendo nella (5) le (2) si ha:

$$\omega^2 \sum_{i\varkappa} a_{i\varkappa}\, \sigma_i \,.\, \sigma_k + \omega\,\theta \sum_{i\varkappa} a_{i\varkappa} (\sigma_i \,.\, \tau_k + \sigma_k\, \tau_i) + \theta^2 \sum_{j\varkappa} a_{i\varkappa}\, \tau_i\, \tau_k =$$

$$\omega^2 \sum_{i\varkappa} a_{i\varkappa}\, \sigma_i\, \sigma_k - \omega\,\theta \sum_{i\varkappa} a_{i\varkappa}\, (\sigma_i \,.\, \tau_k + \sigma_k\, \tau_i) + \theta^2 \sum_{i\varkappa} a_{i\varkappa}\, \tau_i\, \tau_k$$

ovvero:

$$\sum_{i\varkappa} a_{i\varkappa}\, (\sigma_i\, \tau_k + \sigma_k\, \tau_i) = 0$$

che si può anche scrivere

$$\text{(6)} \qquad \sum_i \tau_i \sum a_{i\varkappa}\, \sigma_\varkappa = 0$$

Ora per le (3)

$$\sum a_{i\varkappa}\, \sigma_\varkappa = \sum_r z_r \sum_\varkappa a_{i\varkappa}\, \lambda_{\varkappa r}$$

Posto: $\sum_\varkappa a_{i\varkappa}\, \lambda_{\varkappa r} = \Delta_{ir}$ avremo per la (6)

$$\sum_i \tau_i \sum \Delta_{ir} \,.\, z_r = 0$$

e sostituendo i valori della (5) dati dalle (3)

$$\sum_{rs} z_r \,.\, z_s \,.\, \sum (\mu_{ir} \,.\, \Delta_{is} + \mu_{is}\, \Delta_{ir}) = 0$$

e perciò si hanno le condizioni:

$$\sum_i \mu_{ir}\, \Delta_{is} + \sum_i \mu_{is}\, \Delta_{ir} = 0$$

e posto: $\sum_i \mu_{ik} \Delta_{ih} = W_{kh}$ Si ha:

$$W_{rs} = - W_{sr} \qquad W_{rr} = o$$

I sistemi di equazioni che determinano le λ e le μ sono dunque

$$(\alpha) \sum_x a_{ix} \lambda_{xr} = \Delta_{ir}, \qquad (\beta) \sum_i \Delta_{is} \mu_{ir} = W_{rs}$$

Le W_{rs} già sono in numero di $\frac{n(n-1)}{2}$ quindi per ottenere le formule più generali possiamo attribuire alle Δ_{ir} dei valori speciali. Dalle (α) e (β) deduciamo se Δ è il determinante delle Δ_{rs}, D quello delle a_{ix}, Δ'_{is} i minori degli elementi Δ_{is} in Δ:

$$D \lambda_{xr} = \sum_i A_{ix} \Delta_{ir}, \qquad \Delta \mu_{ir} = \sum_r \Delta'_{is} W_{rs}$$

Poniamo $\Delta_{ir} = o \ (i \gtrless r) \qquad \Delta_{rr} = D$, avremo:

$$\lambda_{xr} = A_{rx} \qquad D \cdot \mu_{ir} = W_{ri}$$

e le (3) divengono:

$$\tau_i = \frac{1}{D} \sum_x W_{ix} z_x \qquad \sigma_i = \sum_x A_{xi} z_i$$

e infine per le (2).

$$(7) \qquad x_i = \omega \sum_x A_{xi} z_x + \frac{\theta}{D} \sum_x W_{ix} z_x$$

$$(7') \qquad \xi_i = \omega \sum_x A_{xi} z_x - \frac{\theta}{D} \sum_r W_{ix} z_x$$

ove: $W_{ix} + W_{xi} = o \qquad W_{ii} = o$

Dalle (7), (7') deduciamo

$$(8) \quad \frac{x_i + \xi_i}{2} = \omega \sum_x A_{xi} z_x \qquad (8') \quad \frac{x_i - \xi_i}{2} = \frac{\theta}{D} \sum_x W_{ix} z_x$$

Gli elementi uniti della trasformazione si ottengono ponendo $\rho \,.\, x_i = \xi_i$ ovvero:

$$\sum_{\varkappa} \left\{ \omega \, A_{\varkappa i} (1 - \rho) - \frac{\theta}{D} W_{i\varkappa} (1 + \rho) \right\} z_{\varkappa} = o$$

E quindi si ha l'annullamento del determinante:

$$K = \left| \omega \, A_{\varkappa i} (1 - \rho) - \frac{\theta}{D} W_{i\varkappa} (1 + \rho) \right|$$

La $K = o$ è un'equazione di grado n in ρ e però si hanno in generale n elementi uniti. Poniamo:

$$\Lambda = \left| \omega \, A_{\varkappa i} + \frac{\theta}{D} W_{i\varkappa} \right|$$

Risolvendo le (7) rispetto alle z si ha se $\Lambda_{i\varkappa}$ sono i minori degli elementi di Λ:

$$\Lambda z_i = \sum_{\varkappa} \Lambda_{i\varkappa} \, x_{\varkappa}$$

Ora dalla 1ª delle (8) si ha:

$$(9) \quad \Lambda \xi_i = 2\omega \, \Lambda \sum_{\varkappa} A_{\varkappa i} \, z_{\varkappa} - \Lambda x_i = 2\omega \sum_{\varkappa} A_{\varkappa i} \sum_{r} \Lambda_{\varkappa r} \, x_r - \Lambda x_i$$

Viceversa posto:

$$\Lambda' = \left| \omega \, A_{\varkappa i} - \frac{\theta}{D} W_{i\varkappa} \right|$$

Si ricaverebbe:

$$(10) \qquad \Lambda' x_i = 2\omega \sum_{\varkappa} A_{\varkappa i} \sum_{r} \Lambda'_{\varkappa r} \, \xi_r - \Lambda' \xi_i$$

Cerchiamo dalle (9) gli elementi uniti ponendo $\xi_i = x_i \,.\, \mu$. Facciamo le posizioni:

$$c_{ii} = \frac{2\omega \sum A_{\varkappa i} \Lambda_{\varkappa i} - \Lambda}{\Lambda} \qquad c_{ij} = 2\omega \frac{\sum_{\varkappa} A_{\varkappa i} \Lambda_{\varkappa j}}{\Lambda}$$

e inoltre:

$$\varphi(\mu) = | c_{11} - \mu, \; c_{12}, \dots c_{1n} |$$

Le μ sono determinate dall'equazione:

$$\varphi(\mu) = o$$

Se moltiplichiamo tutti gli elementi della φ per Λ e poi ancora la φ per Λ si ha:

$$\Lambda^{n+1} \varphi(\mu) = \left| 2\omega \sum_{\varkappa} A_{\varkappa 1} A_{\varkappa 1} - \Lambda, \; 2\omega \sum_{\varkappa} A_{\varkappa 1} . A_{\varkappa 2}, \dots \right| .$$

$$. \left| \omega A_{11}, \; \omega A_{12} + \frac{\theta}{D} W_{12}, \dots \right|$$

Eseguiamo il prodotto moltiplicando le linee del 1° per le colonne del 2°. Tutti i termini che si ottengono hanno Λ come fattore; dividendo dunque ambedue i membri per Λ^n si ottiene:

$$\Lambda \varphi(\mu) = \left| \omega A_{11}(1 - \mu), \; \omega A_{12}(1 - \mu) - \frac{\theta}{D} W_{12}(1 + \mu), \right|$$

che è appunto K ove al posto di ρ sia posto μ. Inoltre si ottiene confrontando il determinante del 2° membro con Λ, che si deduce dal medesimo ponendo in Λ al posto di ω, $\omega(1 - \mu)$ e di $\frac{\theta}{D}$, $-\frac{\theta}{D}(1 + \mu)$, quindi:

$$\Lambda\left(\omega, \frac{\theta}{D}\right) \varphi(\mu) = \Lambda\left(\omega(1 - \mu), \; -\frac{\theta}{D}(1 + \mu)\right)$$

Relazione dovuta al Cayley.

Venendo al caso di $n = 3$ se:

$$\omega(x) = \sum a_{i\varkappa} x_i x_\varkappa = o$$

è l'equazione della quadratica le equazioni generali di una trasformazione proiettiva che muta l'assoluto in se stesso si otten-

gono eliminando le indeterminate u, v, w dalle terne:

$$\xi = rv - qw + \frac{1}{2}\frac{d\Phi}{du}, \qquad \eta = pw - ru + \frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dv},$$

$$z = qu - pv + \frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dw}$$

$$x = rv - qw - \frac{1}{2}\frac{d\Phi}{du}, \qquad y = pw - ru - \frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dw},$$

$$z = qu - pv - \frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dw}$$

ove p, q, r sono tre parametri arbitrarii ed è:

$$\Phi = \sum A_{11} u^2 .$$

INDICE